СКАЗКИ ПО ЛОГИКА

СЪСТАВИТЕЛИ ВАЛЕНТИН ГОРАНКО И СОЛОМОН ПАСИ

СКАЗКИ ПО ЛОГИКА

ще се изнисатъ отъ математици

съ намѣренията щото да изложат отчасти историята - но по-скоро днескашното състояние - на нѣщата, досѣжно които формалнитѣ спекулации въ Европа начеват, видимо, съ Ἀριστοτέλης -а и въ чиято нова история, презъ Descartes-а и Leibniz-а и сетне Cantor-а и Frege, вече прозиратъ (макаръ още въ мъгла) необходимитѣ истини, възможнитѣ свѣтове, достатъчното основание, духътъ на детерминизма и призракътъ на безкрайното - тѣзи темели, връзъ които Russell, Brouwer, Hilbert, Church, Turing, Kleene, Kripke сетне съграждатъ - въ прослава на истината, - храма на доказателството, нароченъ като "науката логика" и освѣтенъ отъ сакралнитѣ откровения на Gödel-я, очертаващи - уви! - близката межда, дѣляща нашето знание от непознаваемото отвѫдъ.

Сказкитѣ - достѫпни за ученици, полезни и за академици - ще цѣлятъ въ сѫщината: въ домогването на свободния духъ къмъ истините на разума, гдѣто откритията, привидно непристѫпни за неизкушения въ това изкуство, допущатъ словесно обличие, съблазняващо изкусния въ това поприще, на която почти тѣлесна съблазънъ не би устояла и произволна замислена душа.

СКАЗКИ ПО ЛОГИКА

Владимир СОТИРОВ
Петко ПЕТКОВ
Георги ГАРГОВ
Димитър ВАКАРЕЛОВ
Димитър СКОРДЕВ

ДИГИТАЛНО ИЗДАНИЕ 2011

В основата на изданието са сказките по логика, изнесени в Софийския университет «Климент Охридски» през пролетта на 1987 г. Възродената университетска традиция — да се предлагат в устна форма научни резултати и философски възгледи, събра многобройна и разнообразна публика: академици и ученици, писатели и математици, юристи и икономисти, други интелектуалци и естествено много философи. Без да са буквално повторени изнесените сказки, в сборника са предложени интересни теми от логиката и математиката. Уводната сказка на Владимир Сотиров дава общ поглед върху математическата логика и е разширена специално за книгата. Между сказките са включени преводни есета за логиката и логичното.

За да се четат «Сказките по логика» не са необходими нито специални познания, нито образователен ценз. Достатъчно е читателят да се интересува от законите, които управляват неговото мислене.

СЪДЪРЖАНИЕ

предговор от съставителите

Първата третина от последния век на второто хилядолетие след Христа донесе много и големи интелектуални сътресения на западния човек, едни от които временно замъглиха ума му, а други му причиниха и по-трайни разстройства. След двете унизителни открития на Коперник и Дарвин, отнемащи на човека централното му място в Космоса и божествената му роля в живия свят, предстояха нови съкрушения. Съдбовни постижения в медицината (по-точно в психиатрията), във философията (по-точно в логиката) и в математиката (пак в логиката) развенчаха всемогъществото на мисълта и разколебаха вярата на разума в разума. Психоанализата на Фройд, философията на Витгенщайн и теоремите на Гьодел са именно такива развенчаващи, гранични постижения на науката и на цялата духовна култура, очертаващи нейния периметър, маркиращи хоризонта, който тя няма да достигне.

Родени едновременно и на едно място -- във Виена, в самото сърце на сецесионна Европа, тези три откровения както по своето значение, така и по своето съдържание сякаш казват едно и също нещо на различни езици и носят общо послание към различни трибуни от една аудитория. (Разбира се, резонансът е адекватен на достъпността на самите науки — най-голям в медицината и най-скромен в математиката.) Интровертната природа на Фройдовата самоанализа, на Витгенщайновия лингвистичен анализ на езика и на Гьоделовия подход към автореферентните съждения превръща всяко от тези изследвания в свой собствен обект, всеки потенциален изследовател — в свой собствен пациент. Изследването, което става свой собствен обект, изисква ново изследване на новия обект, което става още по-нов обект, изискващ още по-ново изследване, което..., което може да подлуди всеки здрав разум подобно на картина на Ешер или на източна медитация, провиждаща онова по-висше от Дзен, което е оня Дзен, който не е Дзен.

Както за Фройд симптомът изчезва, след като узнаем неговия смисъл, така и Витгенщайн обезсмисля стълбата на езика, след като се е изкачил по нея. Така и теоремата на Гьодел, установила симптома «недоказуемост на непротиворечивостта» за дадена теория – симптом, който изчезва при изкачването в някаква външна метатеория, – създава цяла йерархия от теории, по стъпалата на която обаче човешкият разсъдък никога не ще може да се изкачи. Там, след невидимия край на тази безкрайна стълба на Гьодел са всичките истини за естествените числа, които – както математиците отдавна бяха прозрели – са чисто творение Божие. Отвъд този безкрай е и душевното битие на Фройдовия Аз, което, уви, той не владее. Пак там е и философският, непсихологичният Витгенщайнов Аз, метафизическият субект, който е граница на света, но не и негова част, именно там – отвъд границите на значещия език, отвъд стените на нашата клетка, о които безнадеждно се блъскаме.

Дотам, до отвъдното и безкрая ни води онази и само онази последна стъпка, с която според Паскал разумът признава, че безброй неща надхвърлят възможностите му, онази идеална стъпка, която дава увереност, че Бог съществува, макар и без да знаем какво точно представлява Той.

Такива именно въпроси – за отвъдното, за познаваемото и доказуемото, за необходимото и невъзможното, за рая и изобщо за смисъла на живота – се разискваха в Сказките по логика, които бяха изнесени в Софийския университет през летния семестър на 1986/1987 учебна година. Като уредници на Сказките амбициите ни бяха две. Едната беше да възродим четенето на сказки – отколешна университетска традиция. Само бъдещето ще покаже дали резултатът от това ни намерение ще надхвърли рамките на нашето начинание. Другата ни цел беше да представим пред любознателната общественост – от ученици до академици – някаква обща картина на нашата наука, което обаче изискваше висока цена. Защото, по думите на Витгенщайн, научнопопулярната лекция цели да ви заблуди, «че разбирате нещо, което всъщност не разбирате, и да задоволи една от най-низките страсти на съвременните хора, а именно повърхностното любопитство към последните открития на науката». Ако и в тази си цел сме се провалили (на което се надяваме), то остава ни утешението, че може би не сме платили и тази цена (в което все пак малко се съмняваме). Въпреки частичния провал на намеренията ни, а може би благодарение на него Сказките се превърнаха в един ежеседмичен хепънинг, документ за който остава настоящият сборник.

Накрая имаме удоволствието да изкажем своите благодарности преди всичко на сказчиците и на публиката, стимулирала ги с ентусиазма си. С благодарност споменаваме нашия чест гост – Университетския състав за старинна музика «Климент Охридски», и художника Киро Мавров, който направи афиша на Сказките. Колегите от Сектора по логика и най вече Петьо Петков и Владимир Сотиров помогнаха кой както можа. Не можем да не споменем и опонентите – Добрин Спасов, Станчо Димиев, Владко Мурдаров и особено Искра Христова, които бяха почти неотразими. Специално сме благодарни на Искра Христова за лингвистичната, идеологическата и физическата подкрепа. А без помощта и ентусиазма на Петьо Петков начинанието едва ли би дошло до успешен завършек, ако изобщо можеше да започне.

В подготовката на книгата активно участие също взеха мнозина и главно сказчиците, които наново написаха (а някои и разшириха до неузнаваемост) своите размишления. За съжаление тук липсва сказката на Елена Паскалева, не са включени и текстовете на опонентите, както и на дискусиите, но тези липси са частично компенсирани с преводни есета.

Септември 1989 г. В. Горанко и С. Паси

Владимир СОТИРОВ

науката логика като свободно изкуство

необходимите истини във възможните светове

Хорхе Луис БОРХЕС

градината с разклоняващите се пътеки (превод от испански р. хубеш)

Владимир СОТИРОВ

НАУКАТА ЛОГИКА КАТО СВОБОДНО ИЗКУСТВО

Играта на думи в заглавието е очевидна, но тя не е нито самоцелна, нито формална, а има своето съдържателно оправдание. Преведена на ежедневен език, темата на моята сказка означава просто “Науката логика – учебен предмет”.

Няма да разказвам многовековната биография на понятието “свободно изкуство” – трудно ми е да обясня с две думи защо, да речем, аритметиката наравно с музиката е наричана “изкуство”, че и “свободно”. Метаморфозите на понятията “знание”, “наука” и “изкуство” от Древна Гърция до днес чудесно биха запълнили отделна сказка. Мъчнотиите идват от липсата на еднозначно съответствие между тогавашните термини и нашите: гърците са имали три думи за “знание”, но пък не са помествали науката и изкуството в различни министерства – тяхното “техне” означава и двете заедно (плюс още “занаят”)*. Така или иначе, както да теглим границата между изкуството и науката, колкото и да спорим кога е едното и кога – другото, сигурно е, че завещаното от гърците не е занаятчийство.

Идва обаче Новата ера, християнството окончателно измества боговете от Олимп и Тертулиан прокламира, че “след Христос не ни е нужна любознателност, след Евангелието не ни е нужно изследване”. Все пак се намират умни глави и преди всичко Блаженият Августин, които да заявят, че дори само за разбиране на *Светото писание* е необходимо някакво минимално количество наука, а то естествено нямало откъде да бъде взето освен от езичниците, т. е. от древните гърци (впрочем тогава те още не са били станали древни). И в десетилетията около петстотната година Марциан Капела, Боеций и Касиодор канонизират основните сведения, които било желателно да притежава монахът (или все същото – образованият човек), като разпределят наследената от Елада образователна

* ЛОСЕВ, А. 1975. *История античной эстетики. Аристотель и поздняя классика.* Москва: Искусство, с. 355 и сл.

програма в седем клона, наречени "седем свободни изкуства" — прочутите septem artes liberales. Числото 7 също идва от езическата древност, но сега получава нова мотивировка: "Премъдростта си съгради дом, издяла седемте му стълба" (*Библия, Притчи Соломонови,* 9:1). Традиционното подразделяне на тривиум ("трипътие" на мъдростта) и квадривиум ("четирипътие") се покрива с днешното деление на "хуманитарни" и "точни" науки. В първата група, която е давала "началното образование", влизат граматиката, риториката и диалектиката (тогавашното име на логиката), а във втората ("висшето образование") — аритметиката, геометрията, астрономията и музиката (всъщност хармонията). Като добавим задължителното "трудово обучение" в манастирите, в така обрисуваната схема ще съзрем елементите на едно великолепно политехническо обучение — толкова великолепно, че остава непроменено хиляда години, чак до Възраждането. Фактически то остава и след Възраждането, само че разширено (но съвсем не отменено!). Днешното българско ЕСПУ също не се е отказало от хилядолетната традиция — в неговата програма виждаме и граматиката, и риториката (наречена днес "стилистика"), откриваме целия квадривиум, макар аритметиката да се е превърнала в алгебра, а музиката — в пеене … Не откриваме само логиката!

Та думата ми беше, че предметът, който двадесет и пет века — от античността през средновековието до новото време — е смятан за задължителен елемент на общото образование, вероятно е достоен и за нашето училище, а в тази сказка ще се опитам да покажа защо.

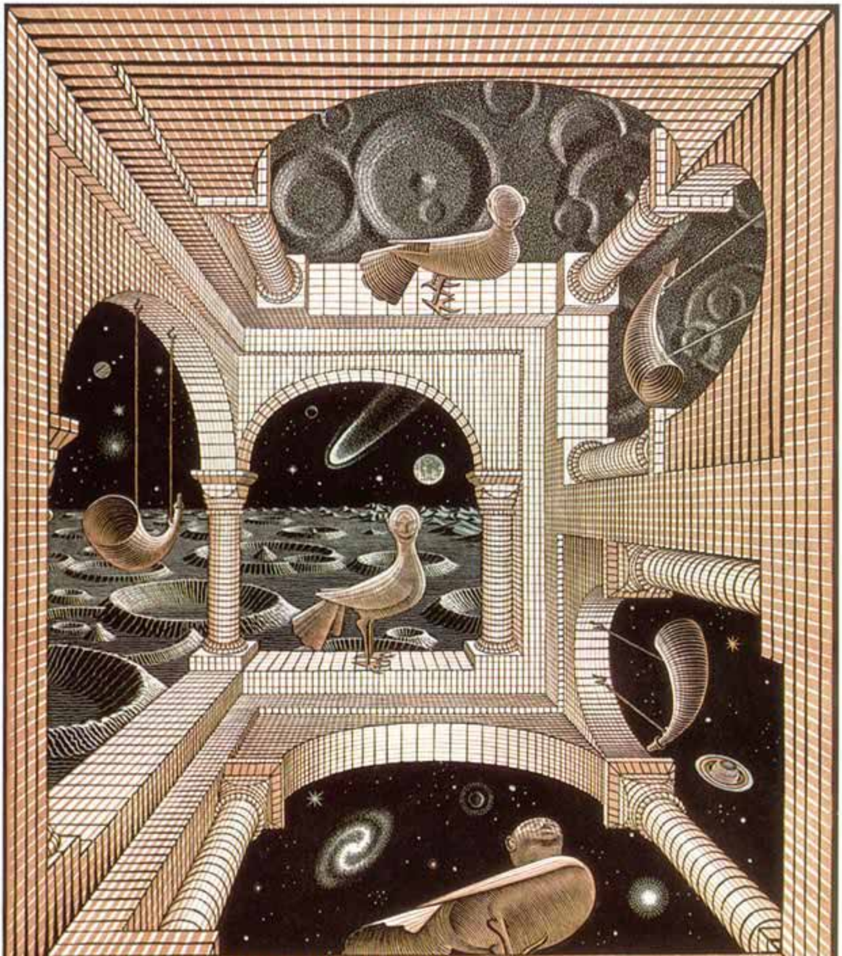
Тук трябва да направя едно пояснение, за да не си отиде любезната аудитория обидена. Като казвам, че логиката е *достойна* за изучаване, нямам предвид *наложителна*. Разликата е огромна. Когато някой иска да свири на пиано, ясно съзнава, че му се налага да учи нотите и да ходи на уроци. Когато пък не може да решава задачите за басейни, той усеща, че не знае математика, и или също взима уроци, или кокетно заявява "Математиката не е за мен". Така е във всички науки и изкуства, включително "свободните": човек или разбира, че не може, и тогава решава да учи, или си казва: "Не мога, няма и да мога." А в логиката? Да сте чули някой да си признае, че не може да разсъждава правилно, понеже не познава законите на логиката? Колко точно забелязва Декарт, че "от всичко на света здравият разум е разпределен най-справедливо, защото всеки се смята тъй щедро надарен с него, че дори онези, които най-трудно се задоволяват във всяко друго отношение, обикновено не искат повече здрав разум, отколкото имат”*. Затова и аз няма да ви уверявам, че за да стане вашето мислене правилно, имате *нужда* от логика, а, напротив, ще се помъча да ви убедя само, че е *интересно* да узнаете причината, поради която вашите безусловно правилни разсъждения са правилни, както впрочем и шах играете не защото ви е нужно да пленявате царе, а защото ви е интересно да наблюдавате как става това.

Думите ми вероятно оставят впечатлението, че вече съм отговорил на въпроса, с какво се занимава логиката, и отговорът ми съвпада с определението, което може да се прочете горе-долу във всяка енциклопедия: “Логиката е наука за правилното мислене.” Ако не е за “правилното мислене”, ще е за “законите на мисленето”; ако не е за “законите”, ще е за “формите” (пак на мисленето). Да, логиката се занимава и с тях, но *не само* с тях. Харесва ли ви определението на аритметиката като “наука за числата и действията с тях, извършвани на пръсти”? И тук няма лъжа, по пък и от истината има малка част. Всякакви уточнения на предмета на логиката, които ни обвързват с “човешкия фактор” — мисленето, ще ни пречат да схванем свръхчовешкото в нея — онова свръхчовешко, което е превърнало и аритметиката от действия с круши в действия с числа.

Впрочем вече стигнах до същността на моята сказка: ще ви представя логиката не като философия, не като психология, а *като математика*. Няма да ви излагам в някаква последователност десетките теми, които са занимавали логиците през последните двадесет и пет века: образуване на понятията, обем и съдържание на понятията, номинални и реални определения, индукция, аналогия, тъждество и различие, анализ и синтез, достатъчно основание, синтетични и аналитични съждения, силогизми, модалности и т. н., и т. н. — през всичко това логиката е минала, с някои стари теми тя се занимава и днес, други е прехвърлила на психологията, трети пък изобщо е отхвърлила. . . Неминуемо при толкова широка постановка — “наука за законите на мисленето” — логиката се е мятала по всички посоки на безбрежния океан на мисълта и ако отворите някой учебник от миналия век, ще бъдете обсипани с безброй морализаторски наставления за добро логическо поведение, но няма да разберете

* ДЕКАРТ, Р. 1978. Разсъждение за метода за правилно ръководене на разума и за търсене на истината в науките. — *В:* ДЕКАРТ, Р. *Избрани, философски произведения.* София: Наука и изкуство, 1978, с. 247.

откъде идват те и защо са точно такива, а не други. Естествено, ако някой може да ни каже какво е мислене (при това правилно!), ние



по̀ ще можем да фиксираме науката за него. А дотогава логиката ще отговаря на заглавието на сказката в буквалния му смисъл — ще е *и наука, и изкуство* в пълно съгласие с критериите, завещани ни от древните авторитети: когато ни съобщава някакви закони, е наука, а когато ни учи да откриваме грешните изводи, е изкуство. Щом ни учи да *знаем*, е *наука*, щом ни учи да *правим*, е *изкуство*. Както впрочем е и с останалите от “седморката” — като науки се занимават с необходимо вярното, което не може да бъде “иначе”, а като изкуства — с възможното и случайното, което може да е “и тъй, и инак”.

Все пак има една твърдина, която логиката запазва въпреки старанията на поколения логици да я разлеят максимално. Тази твърдина е *формалното* в нея, или, нека си го кажем направо, *математическото*. Разбирам, че като се прехвърлям в математиката, с нищо не си улеснявам работата — за нейния предмет също не виждам изчерпателно определение и по всичко личи, че такова не съществува. Но макар да не знаем *какво* конкретно изучава математиката (впрочем всичко!), знаем *как* го изучава. Тук представите ни само на пръв поглед са различни: обикновено, когато кажа на някого, че съм математик, в отговор или ми се предлага да умножа 735 по 458 (на ум!), или ми се казва; “Аха, значи доказваш теореми.” И в двата случая хората са прави — математиката е *и* смятане, *и* доказване. Но какво представляват нейните сметки и доказателства? Нали и в химията има формули за пресмятане, без от това тя да става математика, а камата на масата на съдията също е доказателство (веществено!), без поради това той да е математик? Разликата е там, че в математиката смятането е придружено от доказателство, а самото доказателство има вид на смятане. Оценете каламбура: доказателството в смятането е логическо, а смятането в доказателството е математическо! В първия случай с логически средства извеждаме законността на дадено пресмятане, а във втория пресмятаме резултата от логически действия (само че смятаме не с числа, а с твърдения). Сега можем да реабилитираме традиционното определение на логиката: “наука за методите на доказателство”, но с една добавка — “на *математическото доказателство*”. Или ако предпочитате, “за *математическите методи* на доказателство”.

Връзката между логика и математика е интуитивно осезаема — всеки я усеща, но когато се опита да я опише, обикновено се ограничава с думите “абе, и двете са формални”. А защо тогава Законът за движение по пътищата, който е не по-малко формален, нито е логика, нито е математика? Мисля, че си заслужава да дорисуваме с няколко изречения взаимоотношенията между двете. Щом математиката, както казахме, няма собствен обект на изследване, по който да се отделя от другите науки, нейна отличителна черта остава математическото доказателство. Тавтология ? — Не, понеже математическото доказателство от своя страна е *логическо доказателство*, стъпило върху изрично формулирани изходни предпоставки — конкретните математически аксиоми. Виждаме, че когато логиката изследва доказателствата, неин обект става математиката. Самата логика обаче, изграждана математически, също си има своите аксиоми и по тази причина е математика. Следователно тя е част от математиката, и то онази нейна част, която изучава цялото. Позволете ми тук да привлека един антропоморфен образ: математиката подобно на всяка наука има очи (и то толкова силни, че нищо не може да се изплъзне от погледа ѝ), но за разлика от другите науки няма нито ръце, нито уреди, с които да пипа. Тя може само да обгръща с паяжината на Разума и в този ѝ живот Логиката е нейна Съвест— единствената, сила, която има власт над Разума.

Уверен съм, че няма да преувелича, ако от всички превъплъщения на логиката в нейната 2500-годишна еволюция посоча като най-важни скицираните две: нейното математизиране и превръщането ѝ в наука за математиката. Затова подобно на китайците и тя в различните възрасти си сменя името: Логика, Математика, Метаматематика.

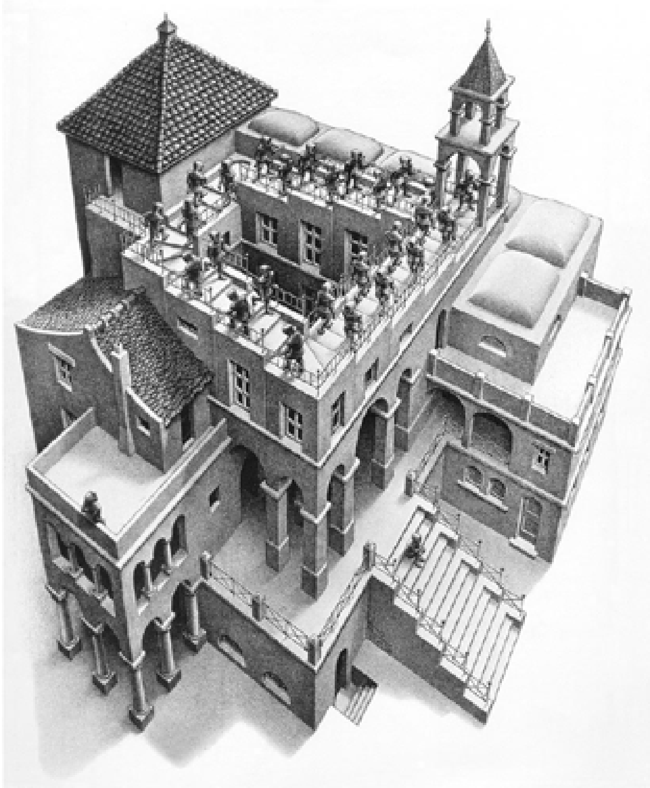
В моята периодизация едва ли казвам нещо ново. Скокът от логика към математическа логика знаменува прехода към онзи висш стадий в развитието на всяка наука, който според ласкателното мнение на философите настъпва, когато тя се опре на математиката, а вторият скок —- насочването на математиката към самата себе си, отбелязва качественото нарастване на сложността във високоразвитите системи, наречено *рефлексия*. Във филогенезата това е появата на съзнание за човешки род, което превръща множеството хора в Човечество; в онтогенезата е появата на съзнание за "аз", което превръща биологичния автомат в индивид; а в нашата наука — математиката, появата на рефлексия бележи превръщането ѝ от апарат за изследване в самоосъзнаващ се организъм. Както виждаме, девизът на Сократ "Опознай себе си" не е само морален принцип: способността за самопознание изобщо е признак за наличие на съзнание (в произволна система – индивидуална, политическа...). В тази схема влизат дори компютрите: очаква се качествено новото свойство на поредното поколение да бъде самосъзнанието, защото става ясно, че по-важно за машината е не да знае много и да разбира всичко, а да може да

* МАНИН, Ю. 1987. К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез). — *В:* Велихов, Е. П. & Чернавский, А. В. , ред. *Интелектуальные процессы и их моделирование*. Москва: Наука, 1987, с. 167.

каже какво не знае, кое не разбира и защо*. Двегодишното дете знае малко, но с него общуването е по-лесно и по-плодотворно, отколкото с многознайната машина, побрала в себе си сто енциклопедии. (Толкова плодотворно, че след година–две детето само започва да ни учи!) Отново ми идва на ум древен афоризъм – явно по-ценно качество е "да знаем, че нищо не знаем", отколкото само "да знаем".

Съзнавам съблазните, които крие съзерцаването на света от собствената камбанария. Тогава той изглежда поразително благоустроен и постоянен, а животът наистина ни се струва възходяща спирала — извивките на миналото неотклонно възлизат към последната дъгичка, нашата … Де да беше така! Естествено е да попитаме: нима хората преди нас не са имали логика? ("Преди нас" означава "нас с Аристотел".) Лесно можем да си представим човечеството без геология, химия, физика, дори без ботаника и география, но без логика? Що за човечество би било то тогава? Подобни въпроси често възникват и в историята на математиката. Уж познаваме в подробности целия живот на геометрията, а току се окаже, че в Египет и Вавилон са знаели питагоровата теорема хиляда години преди Питагор. И започваме да се питаме: коя е родината на това откритие? Справедливото разпределение на заслугите е следното: вавилонците са притежавали *съдържанието* на питагоровата теорема, но им е липсвала … *теоремата*.

А има ли разлика? Въпросът е толкова актуален, че си заслужава да му обърнем внимание. Може ли – да си спомним темата! — да има логика, без да има "наука логика"? Може ли, по-общо казано, един народ да притежава всички знания от дадена наука, без да я има самата наука? Тези, от които зависи какво да има и какво да няма, отговарят: да, може. И най-чудното е, че са прави. Всички древни цивилизации потвърждават това. Без да са чели Евклидовите *Елементи*, египтяните са открили невероятно сложни факти, например формулата за обема на пресечена пирамида. (Колко от вас си я спомнят? А за доказателството и не помислям!) Вавилонците и китайците, също без да се затрудняват с аксиоми и леми, успешно са построявали правилни многоъгълници, пресмятали са лица и обеми, намирали са корените на уравнения … Не личи техните държави да са страдали от липсата на теореми – от каквото са чувствали нужда, постигали са го, а за бъдещите геометрични терзания на гърците не са имали и представа. Икономическата и военната мощ на някои общества не изглежда да е била отслабена от презрението към абстрактните науки — дори прилича да е обратното. Един съвременен историк остроумно отбелязва, че египтяните са имали инкубатори, но не са имали ембриология, докато гърците са имали ембриология, без да имат инкубатори. Римляните са стигнали до съвършенство в архитектурата, без да добавят нищо към геометрията.



Честно казано, и у самите гърци подтикът към търсене на доказателства, т. е. към "правене на наука", е неясен: той не е нито вътре в математиката (понеже за тогавашното ѝ ниво доказателствата са били излишен лукс), нито е извън нея, в техниката, която по естествен начин налага граници на прецизността. За "непрекъснато нарастващите потребности" на практиката са достатъчни апроксимации на научната истина със съответно нарастваща точност, без постигането на абсолютна точност да бъде някаква цел. Кой храм ще рухне поради това, че диагоналът на квадрата е несъизмерим със страната? Коя колесница ще престане да се движи, понеже квадратурата на кръга е неосъществима? Да е останал ъгъл, неразделен на три равни части, само защото линийката и пергелът не стават за целта? Не е толкова трудно да си представим цялото развитие на гръцката геометрия в стила, който става типичен, да речем, за логиката през средновековието – някаква смесица от директиви, чертежи и мистерии.

Спор няма – всяка наука дава рецепти и математиката не прави изключение. Всички математически сведения в египетските папируси са във вид на наставления: "Смятай с…, от него трябва да вземеш …, пресметни остатъка...” След няколко хиляди години, когато в Хорезъм се роди Мухамад ибн Муса, неговото име “Хорезмиеца” (ал-Хорезми) в латинизираната си форма “Алгоритъм” ще се прехвърли върху такъв род наставления. На алгоритмите ще бъде посветена цяла отделна сказка, аз също по-нататък ще кажа няколко думи за тях. Засега само искам да подчертая, че “командните” методи в математиката не са от вчера, те са живи и днес. Как например умножавате числа? — Гледате в таблицата за умножение, прибавяте “наум” колкото трябва, после измествате с един разряд наляво, накрая събирате. Предписания, предписания... И нямам никакво намерение да ги развенчавам, но в какъв контраст са те с изложението на Евклид: в него няма нито един императив, повелителното наклонение навсякъде е заменено с “понеже”, “защото”, “следователно”.

Очаквам въпроса: А кой и как ще съставя математическите директиви, ако липсва свещеният критерий на доказателството? – Отговорът е колкото прост, толкова и банален: Ами има кой, а пък той си знае как. Съвсем реална е била перспективата математиката да си остане и при гърците полуемпирична, полуумозрителна и във всеки случай напълно езотерична наука, каквато е била преди тях. Няма никаква нужда истините, родени от прозрението на някой корифей и влезли в свещените книги, да бъдат предоказвани на този и онзи. Въпросът “‘защо” по отношение на такива истини (и автори) изобщо е неуместен. Ако “собственикът на истината” реши да разсъждава, за да стигне до нея, това е негово право, но разсъждението също остава негова собственост или най-малкото той не е длъжен да го оповестява. Крайният резултат не върви в комплект с доводите, защото критерий за вярност не е доказателството, а (и най-добрия случай!) приложимостта, т. е. на днешен език практиката. Така е било в Египет, във Вавилон, така е и днес тук-там по снега...

Действително, кой луд ще седне да доказва, че диаметърът дели кръга наполовина или че в равнобедрения триъгълник ъглите при основата му са равни? Или че при пресичането на две прави се получават равни ъгли? Отговорът обаче предразполага към размисъл: този “луд” е наричан “баща на гръцката наука”, той е първият от “седмината мъдреци” – Талес. Векът е шести преди нашата ера, на хоризонта се появяват гърците.

Откъснато от политическия и психологическия контекст на епохата, най-фрапиращото древногръцко изобретение, което ни е учудвало още в отделенията — геометричното доказателство, наистина изглежда странна случайност. Изисква се известно усилие на мисълта, за да разберем защо Евклид смята за необходимо да ни доказва, че "кръг не може да пресича кръг в повече от две точки", а трябва да приемем на вяра неговата аксиома, че "ако права при пресичането си с други две прави образува вътрешни ъгли, които заедно са по-малко от два прави ъгъла, то тези прави, продължени безкрайно, ще се срещнат от онази страна, от която са ъглите, по-малки от два прави"*. Всичко тук е в пълно противоречие с широко разпространеното мнение, че аксиомите са очевидни истини, от които извеждаме по-сложните, "неочевидните". Може ли да бъде очевидно нещо, което използва безкрайност! Продължавам да говоря за геометрия вместо за логика, понеже обещах да ви представя логиката като математика, а нейните признаци са най-забележими в геометрията. Впрочем гърците също не са различавали подходите си към математика и логика — да си спомним, че преди да почне да преподава силогистика в своя Лицей, Аристотел вече е бил прекрачил прага на Платоновата Академия с нейния застрашителен надпис: "Да не влиза този, който не знае геометрия!" Обстоятелствата около канонизирането на геометричното доказателство малко ще се прояснят, ако напомня за другите велики открития на гърците от същото време — от гледище на здравия разум те изглеждат не по-малко странни: демокрацията, комедията и трагедията. Сега забелязвам, че и четирите понятия в заглавието на моята сказка носят днешния си смисъл от Древна Гърция: и "наука", и "логика", и "свобода", и "изкуство". Това ме кара да се замисля дали пък великото откритие на Елада не е в основата си едно: връзката между четирите.

Тук искам да се оправдая за честите отклонения от темата – логиката, и по-точно за това, че още не съм стигнал до нея. Най-лесно бих могъл да ви разкажа от какви дялове се състои днешната математическа логика, какво изучават те и кои са главните резултати в тях. За да усетите как би изглеждала такава сказка, представете си, че темата ми беше "науката геометрия" и аз започна да ви излагам аксиомите, после теоремите и техните доказателства. Та това ще бъде урок, а не сказка! Разбира се, няма да отмина и теоремите в логиката, но освен тях ми се ще да изпъкне необходимостта, която я е породила като наука, а тя е същата, която е дала живот и на други вълнуващи явления в европейската култура.

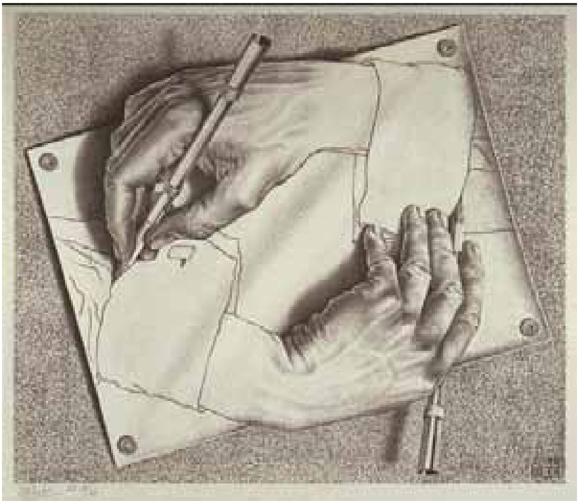
* Срв. ЕВКЛИД. 1972. *Елементи*, т. 1. София: Наука и изкуство, с. 70, 13.

Споменах здравия разум в смисъла, в който той най-често се употребява: като мярка за бързорезултатна целесъобразност. Ето, ако целта ни е да наложим своите убеждения, необходими ли са завързани доказателства? Не е ли противоестествен Сократовият метод за откриване на вярното чрез непрекъснато търсене на невярното? Постоянното раздвояваме на съзнанието между противоречащи си тези и неотлъчният вътрешен глас на отрицанието не са ли чужди на разсъдъка и не говорят ли те за шизофрения? (Освен натрапващия се отговор, че човечеството и в 1984-та преди нашата ера е познавало по-ефикасна методика за убеждаване, отколкото е търсенето на противоречие, краят на Сократ ни подсказва допълнителна поука: човечеството не обича да бъде убеждавано и чашата цикута доказва това.) По-нататък, ако искаме да се смеем, малко ли поводи можем да намерим наоколо, а ако искаме да плачем, не стигат ли трагедиите, които сами ни се струпват, та и да ги гледаме на театър? (Още повече, като знаем предварително какво ще стане.) Ако пък целта е изграждането на силна държава, нима не е най-близко до ума в основата ѝ да заложим тоталното господство на Системата при пълно ликвидиране на възможността за флуктуации на елементите? Най-сигурният принцип в случая е “Слаб индивид – силен колектив”.

Нещата наистина ще да са свързани, защото много епизоди от историята показват, че както едновременно разцъфтяват свободите, изкуствата и науките, така едновременно и погиват. Сега вече не гледам от собствената камбанария – това, което в историческа ретроспектива е ясно като бял ден, за гърците също е било несъмнено и дори безкрайно ценно. Те чудесно са осъзнали, че демократизмът е най-важното условие за жизненост на всяка система, била тя политическа, научна или артистична. Ето и свидетелството на очевидец – Лизий: “Гърците първи и единствени изгониха царете си и установиха демокрация, като твърдяха, че свободата на всички създава най-голямо единодушие.” Пиесите от онова време също дават поводи да смятаме, че риторичните въпроси, които току що поставих, не са далеч от историческата реалност. Както знаете, в битките при Маратон и Саламин неизброимите орди на персите са сразени от несравнимо по-малобройните войни на Атика. И когато в пиесата на Есхил майката на победения Ксеркс задава естествения за нея въпрос: “Кой им е вожд и надзирател, кой е техен господар?”, тя получава необикновен за епохата отговор: “Не са слуги те и на никого не са подвластни.”

От многото изводи, на които ни навежда гръцката демокрация, един ще ми послужи нататък: тя доказва, че е напълно възможно устойчива система да се гради от неустойчиви елементи. Нещо повече, именно за да бъде системата устойчива, а това означава да се нагажда към променящите се обстоятелства, не трябва елементите ѝ да бъдат със строго фиксирани параметри. В нашия пример обществото е принудено да строи своята система – държавата – от изключително променливи и капризни елементи, каквито са отделните хора. И тук един изход се вижда веднага: връзките между елементите да бъдат такива, че да изключват променливостта им. Тогава частите на устройството имат строго фиксирано поведение, но за жалост постоянството на самото устройство е илюзорно и във всеки случай то е неустойчиво. Системата наподобява кристал – твърд, но крехък. Малко по-трудно се вижда, че има втори изход: връзките между елементите да са такива, че промените в тях да се компенсират взаимно и в мащаба на системата да затихват, както тихата морска повърхност не издава сблъсъците на подводните течения. Тогава системата се превръща в жив организъм – общо взето, безформен, но жилав; макар че варирането на отделния елемент е допустимо в твърде широки граници, то не разрушава цялото, а цялото пък е толкова стабилно, че осигурява и стабилността на всеки свой елемент. Ако ми позволите да използвам злободневна терминология, първият изход означава въвеждане на "командно административни методи на управление". Гърците са избрали втория изход… и са победили.

Събраните наблюдения от тази политоложка екскурзия сега ще можем да пренесем в други области, включително в логиката. Да си спомним първоначалното ѝ определение като наука за правилното мислене. Ние го отхвърлихме, но не защото е грешно, а защото е ограничено. Все още сме обаче в VI в. пр. н. е. и затова да започнем с него. Кое мислене е правилно? – Вероятно това, което не допуска промъкването на лъжа в разсъжденията. Но какво е лъжа? – Онова, което не е истина? А по-нататък? Има ли изобщо истини? Каква истина можем да притежаваме за река, в която дори не можем да се изкъпем два пъти? И откъде да дойде тя – от реката, която, докато я погледнем, вече не е същата, или от нашите сетива, така склонни към изневяра? Опитът с летящата стрела отдавна е показал колко ефимерни са описанията на движението с думи – все едно да ловиш вятъра с рибарска мрежа. А движение, както мълчаливо ни доказва Диоген, все пак има… Явно истини, които зависят и от момента, и от човека, са полуистини. Прякото наблюдение не може да даде достоверно знание, то може да породи само мнение. Надеждата е в интелекта, макар че в него няма нищо, което преди това да не е било в сетивата: вещите са изменчиви, но идеите за тях са вечни и постоянни. Единствено истините, изказани за идеите, са достоверни. Заменяне на вещите с идеи за тях дори когато тези вещи са звездите – друг път не ни е даден. А ако се окаже, че нашите съждения не покриват съвсем точно действителността, толкова по-зле за нея: материалното винаги е несъвършено за разлика от идеалното. И така, само истината за измисленото е достъпна за нас, само нея можем да изучим напълно. Когато заговорих за театъра, то бе, за да го дам сега за пример: зрителите от Епидавъра отдавна са умрели и всеки от тях е отнесъл със себе си своята истина; заедно с историческите герои е загинала и истината за тях, но истината за театралните герои ще остане во веки веков, защото друга истина за тях освен пиесата няма. Можем да се усъмним дали разстоянието между Маратон и Атина е 42km 195m, но не можем да не вярваме, че диагоналът на квадрата е √2, защото и за него друга истина освен включената в Евклидовите *Елементи* няма.



Композирах този колаж къде от реални, къде от вероятни изказвания на Хераклит, Зенон, Сократ, Платон и Аристотел, за да открием най-накрая що за корен има "гръцкото чудо", та от него израстват толкова различни дървета – поезия, музика, театър, демокрация, геометрия, логика …

Как се ражда поезията? — Същите думи, които са били най-обикновена проза, изведнъж се превръщат в стих, когато късите и дългите срички следват в определен ред. Значи думите могат да са произволни, стига да са подчинени на *законите на ритъма*. А музиката? Тонът ли я прави, както твърдят французите? Същите тонове правят и чудесен шум! Теорията на гърците е друга: тоновете могат да са

*Срв. ВИТГЕНЩАЙН, Л. 1988. Логико-философски трактат. *В:* ВИТГЕНЩАЙН, Л. *Избрани съчинения*. София: Наука и изкуство, 1988, с. 124.

произволни, стига да са подчинени на *законите на хармонията*. Сигурен съм, че повечето от вас очакват сега да дам за пример архитектурата и древногръцкия идеал за човешкото тяло: нали и там красотата на отделния елемент - бил той фронтон или бедро — не стига, по-важно е частите в своята съвкупност да са подчинени на *закона на златното сечение*. За съжаление древните текстове не показват зародиш на ренесансовия естетически канон, но нашето желание на всяка цена да бъде формулиран някакъв *закон на пропорциите*, към който да са се придържали гърците, е косвено указание за характерното в тяхната методология. В математиката, а донякъде и във всяка наука важи подобен принцип: приемането или отхвърлянето на едно твърдение се определя не от самото твърдение, а от мястото му в системата на останалите твърдения и по-точно от *законите на логическото следване*. Накрая, за обществото вече знаем: хората могат да са каквито щат, стига да се подчиняват на *законите на държавата*.

Не искам да оставям впечатлението, че сега издигам принципа, който преди малко оборвах от името на гърците — "Елементът е нищо, Системата е всичко". Не, системата също е нищо, всичко е Законът. Еднаквият подход към разгледаните явления, които са толкова разнотипни, издава дълбокия структурализъм на гръцкото мислене и следният цитат от Аристотеловата *Политика* (A I 12, 1253 a 25) подкрепя моите подозрения (макар че темата на откъса е конкретна, обобщението в него е очевидно): "Отношението на всеки отделен човек към държавата е както отношението на всяка част към цялото. Онзи, който не е способен да влезе в общуване или се смята за достатъчен сам по себе си, престава да е елемент на държавата и се превръща или в животно, или в божество." С една дума, такъв елемент вече не принадлежи на системата — той е вън от нея, защото Законът прави Системата система от елементи, а Елемента -- елемент на система. Не е важно какви са елементите сами за себе си, важното е как те са свързани помежду си, а изследването тогава се свежда до откриване на техните връзки. Единствено изучаването на Закона дава знание и за Системата, и за нейните елементи: извън Закона на структурата всяко определение на системата е празнословие, а определението на отделния ѝ елемент – кух звук. От Закона зависи *каква* е Системата и *кой* е конкретният ѝ Елемент. Нещо повече, ние успешно можем да изучаваме Системата, без да разберем структурата на нейните елементи – това в края на краищата не е и толкова интересно или ако е интересно, то във всеки случай е изучаване на друга Система. Математиците от векове изследват числата, точките, правите и т. н., без изобщо да се мъчат да отговарят на въпросите, какво е число, какво е точка… Те не само следват (без да знаят) съвета на един виден философ от наши: дни — “За онова, за което не можем да говорим, да мълчим”*, но и изрично казват за какво няма да говорят. Ето: какво е триъгълник, ромб или окръжност – казват, но какво са самите точки, от които те се състоят – мълчат… Логиците също изследват връзките между съжденията, без да знаят какво е съждение, какво е смисъл, дори какво е истина… А ако някой се опитва да дава определения от типа на Евклидовото “Точка е това, което няма части”, цената им няма да е голяма -- такива определения не се използват по-нататък, те не са вплетени в тъканта на научната система и затова според терминологията на гърците могат да бъдат “мнения”, но в никой случай “достоверни знания”. Ако помислим малко, ще видим, че изследването на обществото и държавата, слава Богу, също не изисква точно определение на човека, защото по този въпрос не сме много далече от оскубания петел на Диоген.

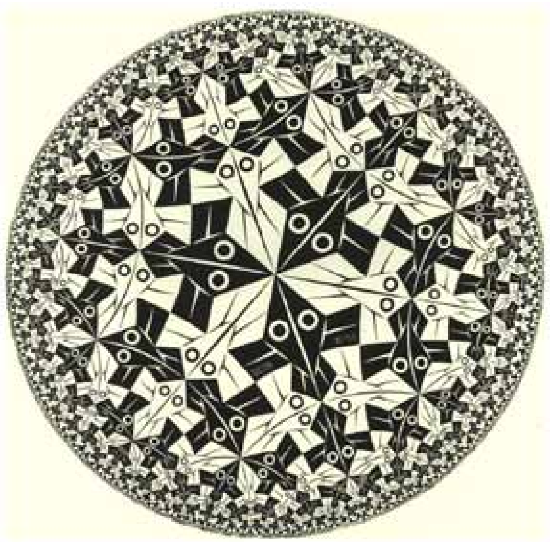
Уличих гърците в структурализъм, а от него до математиката е само една крачка. Те са я направили, да я направим и ние. “Най-напред трябва да кажем за какво е изследването и работа на коя наука е: то е за доказателството и е работа на доказателствената наука.” С тези думи започват Аристотеловите *Аналитики* (I 1, 24 а), с тях някъде преди 2300 години започва и науката логика.

Дотук добре: значи, науката наистина е “за доказателството”, както подозирахме. И никъде нататък в текста няма да срещнем “форми на мислене”, “правилно мислене” и тям подобни. Впрочем форми има, но не на мисленето. Според Аристотел изобщо “работа на математиката са формите”, докато “другите науки използват нейните форми” (79а 5). Не мога да не отворя една скоба: колко по-точно е схващането за математиката като “метод на формите” от общоприетото ѝ определение като “наука за пространствените форми и количествените съотношения на реалния свят” (Енгелс). Макар че второто определение е от 1876 г., то включва само геометричните форми на реалния свят и аритметичните съотношения, а изключва например “смятането със съждения”, което към тази дата вече е било проходило.

И така Аристотел приема, че логиката се занимава с формите на доказателството, а по-нататък казва, “че доказателството е вид силогизъм”, следователно логиката се занимава със силогизмите. Дали пък току що не получихме пример за силогизъм? Обикновено, когато чуем израза “Аристотелов силогизъм”, пред очите ни изниква схемата:

Хората са смъртни,
Сократ е човек,
следователно
Сократ е смъртен.

Общо взето, така е, но с една неточност: това не е *Аристотелов* силогизъм. Може да е силогизъм в смисъла, в който го използват безбройните тълкуватели на Аристотел от онова време до наши дни, но просто не е силогизъм в неговия смисъл. Тук най-доброто, което мога да направя, е да преразкажа изводите на полския логик Ян Лукашевич в неговата прочута книга *Аристотеловата силогистика от гледище на съвременната формална логика*, написана преди трийсетина години. Самата книга е образец на научна реконструкция: възстановено е старото в неговия автентичен вид, а същевременно е построено нещо съвсем ново, което служи на живите и става част от тяхната днешна култура. Разлистава човек тази книга и се чуди: нима за 2300 години никой не си е направил труда да прочете какво пише в оригиналния текст на Аристотел? — Не в онова, което пишат, че пише! Съвсем не подхващам тая тема, за да изтъкна колко стар е навикът на човечеството да подменя класиците с оторизирани тълкуватели. Отварям дума, за да покажа с каква упоритост логиката е била отклонявана от пътя й, начертан от нейния създател, все в името на единствено правилното му тълкуване.



Най-напред, забелязва Лукашевич, никъде у Аристотел не се срещат единични термини, какъвто е “Сократ”. Причините са и “идеологически” — нали за единичното наука не се прави, и чисто технически: термините в силогизма трябва да са такива, че да стават и на подлог, и на сказуемо, а израз от типа “Всички… са

Сократ” очевидно е невъзможен. Ето защо по-”силогистичен” (според Лукашевич) би бил силогизмът

Хората са смъртни,
Гърците са хора,
следователно
Гърците са смъртни.

Това обаче не е всичко. Така поднесен, силогизмът съдържа две твърдения, които са истини, заедно с трето, което “следователно” също е истина. Само че у Аристотел никъде не се среща думата “следователно” — при него е “Ако… и… , то…”. Затова силогизмът в своя “съвсем Аристотелов” вид изглежда тъй:

Ако всички хора са смъртни
и всички гърци са хора,
то всички гърци са смъртни.

Вероятно ви се виждат неестествени двете условия: “Ако хората са смъртни…”, “Ако гърците са хора…” — глупаво е *да допускаме*, че са, след като много добре знаем, че са. Предишният вариант май изглеждаше по-естествен. Да, но ако опитаме с други термини — например с такива, които звучат необичайно за нашето ухо?

Всички трансцендентни числа са ирационални,
Всички ирационални числа са безкрайни непериодични дроби,
следователно
Всички трансцендентни числа са безкрайни непериодични дроби.

И сега ли всичко е ясно? Ами ако заменя “трансцендентни” с “алгебрични” и добавя, че “алгебрични” е точно противоположното на “трансцендентни”? Какво ще излезе — че и в двата случая сме прави? Интересно как трябва да реагираме на следното разсъждение:

Всички птици хвърчат,
Всичко, което хвърчи, се яде.
следователно
Всички птици се ядат.

Пингвините, бръмбарите и гаргите показват истинската стойност на всяко от тези твърдения, но, от друга страна, нишката на разсъждението… Да изпробваме още и

Някои хора са философи,
Някои философи са мъдри,
следователно

Някои хора са мъдри.

Тук вече всичко е вярно, само че пък нишката… Впрочем да опитаме другояче да прочетем предишния пример:

Ако всички птици хвърчаха
и всичко, което хвърчи, се яде,
тогава
всички птици щяха да се ядат.

Сега, изглежда, нещата се поподредиха, но нима за да разсъждаваме правилно, трябва да познаваме истината във всяко отделно твърдение? Нали именно затова разсъждаваме – за да узнаем дали твърдението е истина!

Бъркотията явно не е малка, но въпреки това две хилядолетия живот са ѝ прекалено много, още повече, че Аристотел няма, никаква вина за нея. Ето как изглежда неговата първоначална, неподправена формулировка на силогизма, наречен по-късна *Barbara*:

"Ако P се твърди за всички M
и M се твърди за всички S,
то P необходимо се твърди за всички S."

Иначе казано,

Ако всички M са P
и всички S са M,
то всички S са P.

Няма гърци, няма смъртни – има само формули.

Вероятно очаквате да чуете каква е все пак разликата между традиционния вариант на силогизма и оригиналния, Аристотеловия. Мисля, че те съвсем ясно се различават още по външен вид: първата схема е "A, B, следователно C", докато втората е "Ако A и B, то C". Традиционният силогизъм е *умозаключение*, което включва *три* отделни твърдения, а Аристотеловият се състои от *едно*: "Ако… , то…". В първата схема имаме *три истини*, като третата е следствие от двете; във втората схема истината е само една – *самият силогизъм*, а неговите компоненти A, B и C от своя страна могат да са истини, могат да са лъжи, може изобщо да не знаем какви са. Ако използвам терминологията от следващата си сказка, в схемата на традиционния силогизъм участват три твърдения и когато двете от тях са верни във всички възможни светове, тогава третото също е вярно във всички възможни светове. Аристотеловият силогизъм самият е твърдение (макар и с променливи), което е вярно във всички възможни светове, а във всеки свят вече верността на предпоставките – ако е налице – влече верността на следствието. На логически език в първия случай е *правило за извод*, което от две теореми извежда трета, а във втория случай имаме конкретна *теорема*. Вторият резултат е по-ценен, понеже теоремите могат да се модифицират в правила за извод, докато обратното невинаги е в сила. Една аналогия от геометрията ще изясни разликата между двата вида силогизми -- традиционния и Аристотеловия. Доказали сме, да речем, че Δ ABC – някакъв специален триъгълник – е правоъгълен; това за нас е теорема 1. "Следователно", казваме тогава, за страните на Δ ABC е изпълнено $a^2+b^2 = c^2$ и това е теорема 2 ("следствие от теорема 1"). В популярния силогизъм с гърците е същото – установили сме (дали с цикута, дали с друго), че хората са смъртни, установили сме още, че и гърците са хора, следователно, твърдим тогава, гърците са смъртни. От друга страна, геометричен аналог на оригиналния Аристотелов силогизъм ще бъде добре известната ни питагорова теорема: "Ако Δ ABC е правоъгълен, за страните му е изпълнено..." Ние не знаем на какъв триъгълник ще попаднем – триъгълници разни, но *ако* е правоъгълен, тогава... Нещо като в мъглявината Андромеда – без да познаваме тамошните хуманоиди и без да знаем дали те изобщо имат богове, ние *знаем*, че ако всички хуманоиди са смъртни и всичките им богове са безсмъртни, то никой хуманоид не е бог, както впрочем и никой бог не е хуманоид (ето едновременно още два автентични Аристотелови силогизъма: *Cesare* и *Camestres*).

Предполага ли някой колко далече от логиката ще ни отведат след малко размислите около нейните правила! Да се подложим пак на тест: съгласни ли сте, че "Ако всички крадат, то и ей онзи също краде"? Сигурно да: крадат - не крадат, формулата е вярна, защото ако допуснем нещо за всички, тези "всички" ще включват и произволно избрания "онзи". Едва ли се налага подробно да обяснявам, че подобна формула е валидна за всяка група, по какъвто и признак – не само апашки – да е обединена тя: с признака на групата е белязан всеки неин елемент. Оттук лесно получаваме съответното правило за извод: ако установим, че дадено свойство е присъщо на всички обекти, то ще е налице и у кой да е конкретен обект. "Крадливостта" не е универсално свойство (и слава Богу!), но за смъртността смело мога да кажа: "Всички хора са смъртни, следователно – уви! – и аз съм смъртен.” Както виждаме, традиционният пример за силогизъм всъщност е приложение на един общ логически принцип, да го наречем *принцип за конкретизацията*: “Истината за всички е истина за всеки.” В него веднага съзираме главния метод на науката, повече известен като *дедукция*: “от общото към единичното”.

Сега да продължим с теста. Бихте ли приели правило, което да е обратно на горното: “Щом ей онзи краде, значи, всички крадат”? – Неправомерно обобщение, вероятно ще възразите. И ще бъдете прави, но не почиват ли именно на туй правило повечето от ежедневните ви сентенции от типа “Всички жени са еднакви” и “Всички млади са такива”? Мисля, че известна яснота по въпроса ще бъде от полза за общественото мнение. Правилото, което се мъчим да формулираме, е често употребявано в математиката, затова да вземем модел от нея. Спомнете си как се доказват някои теореми: чертаем какъв да е триъгълник, установяваме нужното свойство и заключаваме: “За всеки триъгълник е вярно…” Но нали все пак не сме разгледали *всички* триъгълници, а само един - начертания? Там е работата, че когато никъде в разсъжденията не сме използвали “специфичните” свойства на нарисувания триъгълник – онези, които го индивидуализират, за нас той е произволен и на негово място може да дойде всеки друг. Тогава коректната форма на нашето наблюдение ще бъде: “Когото и да срещна – краде; значи, всички крадат” – така то би имало поне логически основания, защото социални няма (това комай се отнася и за останалите ни сентенции). Следователно при законните обобщения потвърждаващият пример не е фиксиран обект, а променлив и затуй фактически обхожда всички обекти. По-свободно изказан, съответният логически принцип – нека го наречем *принцип за обобщението*, гласи: “Истината за отделното важи и за цялото.” Всъщност това е известният метод на *индукцията* – “от единичното към всеобщото” – и ако приемем вододела, предложен от Лесли Уайт в *Науката за културата*, ще трябва да го положим в основата на изкуството.

Механизмът на обобщението, изглежда, е генетично вграден в нашето съзнание – той е толкова естествен за нас, че не усещаме неговото действие. Дори не подозираме, че обобщението е станало елемент на езика: средствата, с които изразяваме единичното

* УАЙТ, Л. 1988. *Науката за културата. Изследване на човека и цивилизацията.* София: Наука и изкуство, 1988, с. 43.

и всеобщото – “този” и “всеки” – често са едни и същи. В такива случаи не е възможно чисто синтактично, само като гледаме “повърхностната структура” на изречението, да определим за фиксиран обект ли става дума, или за всички обекти от класа. Езикът е заличил различията между двата прочита и затова отговорът се получава чак след надникване в “дълбоката структура” на текста, което означава позоваване на факти извън него – такива, които не са явно описани, а се подразбират. Най-вълнуващото е, че нашият мозък извършва еднозначния прочит автоматично! Ще дам няколко примера. В изречението “Патицата не затваряше очи, а гледаше край себе си врявата, движението на перата, пръските вода… и усещаше дълбоко в себе си колко хубаво нещо е патицата” една и съща дума – “патицата”, употребена два пъти в една и съща граматична позиция, първия път ни насочва към конкретен обект (“оная патица, дето ни я описва Радичков”), а втория път в пълно съгласие с логическото правило (понеже съзнанието” ни с нищо не я конкретизира) тя означава “патицата въобще”, т. е. “всички патици”. Прочетем ли, че “… лисицата се измъкна между краката на селянина. Той кво ли не я псува, кво ли не я прави - но лисицата от псувня не разбира…”, ние нито за момент не се колебаем в смисъла, макар че отново с една и съща дума са означени две съвсем различни неща: и обектът на хайката, и целият род Canis vulpes. Сега, с придобитата практика по семантика на текста предположението на черказеца, че “Прасето може да е заспало и затуй не ме чува”, ще ни е съвсем достатъчно, за да открием добичето, обобщено в ответната реплика: “Прасето не можеш да го събудиш, ако заспи.” И прочие, и прочие… – би казал на това място Радичков. Аз от своя страна обаче ще направя едно натрапващо се семиотическо отстъпление: в основата на стиловия похват, който изпъква като типичен за този автор, е двойствената употреба на едни и същи именни словосъчетания: веднъж като константи, фиксирани от повествованието, втори път като променливи, обобщени според известния ни принцип. Ето какво забелязва опитното логическо око!

Преди да напуснем сферата на изкуството, нека му хвърлим още един поглед – видяхме, че от това има полза. Главният му метод, както го определиха неговите теоретици, беше обобщението: “Изкуството се занимава с всеобщности посредством частности”*, казва Лесли Уайт. И… нов парадокс: на теория натоварването на художествения образ със “специфични” черти би трябвало да го удави в тресавището на конкретността, а на практика именно напомпването му с “типични”, “исторически обусловени”, “общочовешки” и други универсални свойства му пречи да се рее над света, за да се слее с всеки от нас. Излиза, че колкото по-”единичен” е образът в изкуството, толкова повече реални хора се познават в него – вероятно защото всяко “аз” също е единствено.

“И тъй в един човек играя аз
безброй лица и всички недоволни:
понякога съм крал и сред измени
на просяка завиждам; ставам просяк
и смазан от лишения, поисквам
отново да съм крал; и крал съм пак,
но Болинбрук ме смъква от престола
и пак съм нищо; и така нататък.” *

Сякаш за да потвърди нашето логическо откритие, че в художествения образ има скрито заместване на “този” с “който и да е”, Шекспир продължава:

“И във каквото и да се превърна,
на мен – пък и на всички по земята,
които носят името “човек”,
не ни харесва нищо, докато
сами ний станем нищо…” *

Нейсе, да се върнем в логиката. Главната роля, която силогизмите са играли в нея цели две хилядолетия (макар и заменени от дубльори), ме задължава да им отделя още няколко минути. Нека най-напред ги опишем по-точно. Вече видяхме, че у Аристотел силогизмът не е умозаключение, а е сложно изречение от типа “Ако… и… , то…”. Точките заменят три прости изречения – двете условия и заключението, а всяко от тях е в една от следните четири форми: “Всички… са…”, “Някои… са…”, “Никои… не са…” и “Някои… не са…”. Сега точките заместват два класа обекти, традиционно именувани “субект” и “предикат” (т. е. подлога и сказуемното определение, например “хора”, “смъртни” и т. н.). Нека за краткост ги наричаме “свойства” – свойството “човек”, свойството “смъртно”, “разумно” и т. н. Задължително двете свойства в заключението участват и в условията, но не заедно: едното свойство е само в първото условие, а другото – само във второто (без значение дали там са “субект” или “предикат”). Свободното място в условията е заето от трето свойство, което е “посредник” между изходните две

* ШЕКСПИР, Уилям. *РичардII* Превод на Валери Петров.

и именно то според Аристотел прави доказателството. Щом във всеки силогизъм свойствата са три, а всяко свойство поотделно може да бъде и подлог, и сказуемо в изречение, което на свой ред приема четири различни форми, от най-елементарни "тото" - съображения се убеждаваме, че възможните комбинации, т. е. всички силогизми, са 256. Разбира се, някои от получените съчетания ще са очевидно нелогични (например "Ако всички змии са влечуги, а никои влечуги не говорят, то всички змии говорят"), други ще са очевидно верни (такова съчетание е споменатата *Barbara* – "Ако всички риби дишат с хриле и всичко, което диша с хриле, мълчи, то всички риби мълчат"), а за трети ще се наложи доста да помислим, преди да ги приемем или отхвърлим. Ето пример: има ли логически основания твърдението "Щом всички хора са разумни същества, а никоя птица не е човек, то никоя птица не е разумно същество"? Действително никоя птица не притежава разум, но схемата на разсъждението трябва да е правилна сама по себе си. Работа на логиката не е да изведе истината за разумните същества от истината за летящите такива, а да изведе истината за самия извод (спомнете си началото на нашия разговор – логиката дава не верни твърдения, а верни конструкции!). Веднага се вижда, че в случая това не е така: достатъчно е да заменим "разумни" с "живи". Какъв е изходът? Възможно ли е, щом разсъжденията неизбежно са за конкретни обекти, така да елиминираме допълнителните си знания за тях, че извънлогическото да се утаи, а да изплува само логическата схема? Как да се отърсим от екстралогическите факти - например, че "всички хора" е същото, каквото и "всеки човек", а "хората са разумни същества" крие в себе си "и други няма"? Все изводи, които изведнъж се оказват верни *за съжаление*, понеже в системата на логиката те са паразитни…

Абстракцията, която трябва да осъществим, е огромна, затова и ходът, който предприема Аристотел, е гениален: той въвежда *букви* и разсъждава върху тях, а не върху смъртността на гърците, разума на хората и т. н. Това гарантира, че е отстранена всякаква привнесена отвън истина, продукт на биологическа, историческа, божествена или някаква друга необходимост, като е извлечена само истината, продукт на *логическа необходимост*. Нали помните - "P необходимо се твърди за всички S"… Учудващо системна е Аристотеловата методика! Неговите *Аналитики* са изградени на принципи на бъдещите Евклидови *Елементи*: няколко силогизъма са *приети* за верни, а останалите са *доказани*, като са сведени до изходните. Достатъчни се оказват два "аксиомни" силогизъма: *Barbara* и *Celarent* ("Ако всички S са M, а никое M не е P, то никое S не е P"). Тяхната вярност е "очевидна", но не това е най-важното – други, не по-малко очевидни силогизми са доказани, докато за тези изрично е казано, че няма да бъдат доказвани. Нещо повече, на друго място Аристотел споменава, че за "аксиоми" могат да се вземат някои от доказаните вече силогизми, а първоначалните "аксиоми" тогава ще станат доказуеми. Съвсем в математически стил!

За свеждането на едни силогизми към други Аристотел използва някои логически правила за работа с предикати: "Ако никое M не е N, то и никое N не е M", "Ако не всички M са N, то някои M не са N", "Ако всички M са N, то някои N са M" и др. Освен тях се използват и правила за работа със съждения, например "Ако е вярно p или q и не е вярно q, тогава е вярно p", "Ако p влече q и q не е вярно, тогава p също не е вярно" и т. н. Както виждаме, никои от "служебните" правила не са силогизми. Аристотел не ги доказва и дори не ги формулира всичките в явен вид - те образуват доказателствения апарат, който в други науки – например в геометрията, се подразбира от само себе си. Тук обаче възниква странна непоследователност – уж постулирахме, че всяко доказателство е силогизъм, а самите силогизми доказваме с нещо, което не е силогизъм… Така е, Аристотел не забелязва този факт. Не го забелязват и неговите ученици, и то векове наред… И все пак дефектът е само в прекалено тясното разбиране за доказателството, а от методологично гледище това дори е предимство – представете си, че за доказване на силогизмите се използваха… силогизми. В крайна сметка Аристотел доказва, че от възможните 256 силогизма само 19 (плюс още 5 техни отслабени форми) са верни, а невeрните се опровергават с достатъчно красноречиви контрапримери – коне, разумни същества, растения и пр. Истина е, че отхвърлянето на неверните силогизми съдържа извънлогически елемент – биологичните факти не могат да бъдат логически аргумент, но нямаме право да осъждаме Аристотел за тази – вече втора – непоследователност: никоя наука не се е родила в завършен вид.

Независимо от ограниченото тълкуване на доказателството заслугата на Аристотел е, че насочва логиката към изследване на вярното *по форма*. Тогава верността става резултат от съчетанието на *знаците*, а не от същността на онова, чието означение са те. Достатъчен е външният вид на разсъждението, за да проличи неговата вярност. В *Barbara* всички S са P, без да се налага допълнително да изучаваме S и P. Логиката на Аристотел е формална и в това е нейната сила: след като той веднъж е доказал, че верните базисни силогизми са точно 19, никакво развитие на цивилизацията не ще ги увеличи на 20 – те ще останат 19 до края на света (а и след него). Magister dixit! Аристотеловата силогистика е толкова изящна в своята завършеност – с това, че нищо не може да се добави към нея, нито нещо да ѝ се отнеме, че векове по-късно Кант ще възкликне: "След Аристотел в логиката не е направено нищо ново!" И ще бъде прав (дори повече, отколкото самият би желал).

Силогистиката е чудесно украшение на логиката, но никое украшение не може да бъде фундамент на сграда. Бедата е там, че силогизмите канонизират разсъждения от строго определен тип – такива, които се състоят от субект и предикат. Затова и веригата на доказателството, ако то се ограничава с тях, би се състояла само от последователно зацепени субект – предикат – субект – предикат… Не всички твърдения обаче имат субектно-предикатна структура: както току що видяхме, такива са самите силогизми. Ясно е, че твърдение от вида "Ако… , то…" не може да бъде елемент на доказателство, което включва само фрази от типа "Всички… са…" , "Никой… не е…" и т. н. Най-елементарните аритметични и геометрични твърдения също ни извеждат вън от кръга на силогизмите - съвсем очевидни примери са "Не съществува най-голямо число" и "През две точки минава само една права линия". Ще бъде пресилено да твърдим, че логиците са били слепи за изречения, които не са елементи на силогизми – разбрахме, че и самият Аристотел ги използва, а половин век след него школата на стоиците формулира огромен брой закони на съждителното смятане. Никой обаче не се сеща да ги оформи в самостоятелна дисциплина с правила за проверка подобно на силогизмите, защото всеки гледа на тях само като на спомагателно средство, призвано да ни доближи към заветната цел: субектите и предикатите. “Мислещите машини”, които се проектират векове наред, произвеждат естествено. .. . силогизми. Смятанията, които се строят по подобие на аритметиката, се стремят да обхванат с числа пак субекта и предиката – техните “количества”. Никому не идва на ум, че човек може да “смята” с твърденията, без да ги разлага на субект и предикат– да ги разглежда като цяло, което има едно единствено свойство: да бъде *или истина, или лъжа*. Тогава всяко съставно твърдение ще се сведе до комбинация от прости, а нейната логическа стойност ще се определя само от стойностите на изреченията-съставки и от типа на връзката между тях. Основните логически връзки не са чак толкова много – “и”, “или”, “ако, то” плюс още няколко и, разбира се, отрицанието – “не”. Накрая, вместо да пишем дългите думи “истина” и “лъжа”, можем да използваме знаци, например 1 и 0. Така правилата за логическите връзки – кои комбинации са 0 и кои – 1, съвсем ще заприличат на таблиците за аритметичните действия, но ще бъдат далеч по-прости, понеже аритметиката си служи с десет цифри, а логиката – само с две. Най-важните логически формули — логическите закони – ще се познават по това, че стойността им винаги ще е 1, каквито и стойности да приемат елементите, от които се състоят, т. е. те тъждествено ще бъдат истина. Тогава в съгласие с нашето основно схващане законите ще бъдат онези логически конструкции, които фактически не зависят от своите части. Превръщането на логиката на съжденията в *съждително смятане*, т.е. във вид аритметика, бе извършено в средата на миналия век, макар че достатъчно указания за това превръщане се откриват още у Аристотел. Неговите два закона — за противоречието и за изключеното трето — недвусмислено заявяват, че на твърденията могат да бъдат приписвани точно *две различни* стойности, т. е., както бихме казали днес, логиката е *двузначна*. Оставало е само двата “знака” да влязат в действие, но…

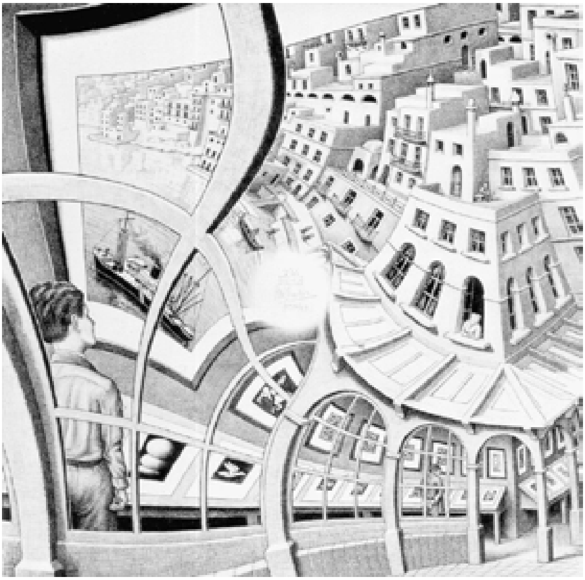
Съждителното смятане е също толкова завършена част от Логиката, колкото и силогистиката, но и то като нея е само една нейна част. Действително повечето разсъждения съдържат “и”, “или”, “не” и “ако”, но те не са достатъчни. Ако трябва да изявим общото между твърденията “Някои числа са четни” и “Някои числа са нечетни”, ще се наложи да раздробим изреченията на най-важните им елементи и да въведем логически знаци за тях. Половината работа вече е свършена от силогистиката, но там изреченията бяха прекалено еднообразни —

винаги започваха с “всички”, “никои” или “някои” и съдържаха само *свойства* на предметите. Ето защо, ако искаме логиката да обхваща всякакви разсъждения, най-напред ще трябва да разрешим на изразите “всеки” и “съществува” да бъдат на произволно място в изречението, и то в неограничен брой. Тогава ще можем да изразяваме на логически език фрази от типа “Не съществува най-голямо число”, “За всяко число съществува по-голямо от него”, “За всяка права и всяка точка вън от нея съществува само една права, която минава през точката и е успоредна на правата” и т. н. От друга страна, последните примери показват, че ще се наложи да излезем и от кръга на свойствата: в изречението “5 е по-голямо от 3” “по-голямо” не е свойство нито само на числото 5, нито само на числото 3. Ако ви кажа, че “5 е по-голямо”, вие веднага ще попитате: “От какво?” Ясно е, че тук имаме работа с отношение между двете, а невинаги отношението между няколко предмета може да се сведе до комбинация от свойства на отделните участници. По тази причина наред със *свойствата* на единичните предмети (“смъртен”, “четен”, “правоъгълен”, “голям” и т. н.) езикът на логиката трябва да отразява и *отношенията* между два предмета (например “по-голямо”, “вляво”, “над”, “пресича”, “съпруг” и т. н.). За единство на терминологията свойствата се наричат *едноместни предикати*, а отношенията - *двуместни*. Изречението “Пловдив е между София и Бургас” обаче ни подсказва, че заради отношението “между” трябва да въведем още *триместни предикати* и изобщо предикати с произволен брой “вакантни” места.

Много от законите на новото логическо смятане, наречено *предикатно*, вече са ни известни: правилото за обобщение (което открихме в изкуството), правилото за конкретизация (което приписахме на науката), законите, които казахме, че използва Аристотел, и т. н. С формализирането на предикатното смятане (извършено в края на миналия век) бе осъществено пълното математизиране на логиката, а с това се изчерпва и първата основна тема в моята сказка.

Системата на съвременната логика вече цялата е на масата ни. Остава да се убедим, че тя служи за нещо – ще можем ли в крайна сметка да отделяме с нейна помощ верните разсъждения от неверните? Примерите, които искам да дам, си заслужават хартията не само защото са взети от велики мислители – Платон и Цицерон, но и защото са куриозни като първи приложения на новото смятане - смятането със

* BOOLE, G. 1854 *An investigation of the lows of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.* London, 1854.



съждения. Книгата, която отварям, е от 1854 г. и носи характерното заглавие *Изследване на законите на мисълта, върху които се основават математическите теории на логиката и вероятността**. Авторът ѝ е Джордж Бул – човекът, който превърна логиката в специален вид алгебра, оттогава наричана "Булева".

Ето първия пример: Цицерон, *За съдбата*: "Щом е вярно твърдението "Ако Фабий се е родил при изгрева на Сириус, той не ще умре в морето", тогава "Фабий се е родил при изгрева на Сириус" заедно с "Фабий ще умре в морето" е противоречие". Усещате, че тук прозира някакъв общ закон, който заменя "ако" с "и" и премества отрицанието. Верен ли е той? Бул означава твърденията с букви и проверява по правилата на новата алгебра: Цицерон е прав.

Вторият пример, който ще разгледаме заедно с Бул, е от *Държавата* на Платон. Главният герой в диалога, Сократ, в типичния си стил постепенно подвежда Адимант: "Ако нещо излиза извън собствената си форма, длъжно ли е то да се изменя или от само себе си, или под въздействието на нещо друго? Но нали онова, което се намира в най-доброто състояние, най-малко се изменя под въздействието на нещо друго? – Нима здравото и силно тяло не е най-малко податливо на въздействието на храната, питието и труда, а растението – на горещините и вятъра? А бог и всичко божествено, не са ли те във всяко едно отношение в най-доброто състояние? Тогава излиза, че бог най-малко от всичко останало приема различни форми? – Освен ако сам себе си не изменя? В такъв случай в нещо по-лошо и безобразно ли се превръща той или в по-добро и по-прекрасно? – Сигурно в по-лошо, стига да се изменя, понеже не може да му липсват красота и добродетел. Възможно ли е обаче — дали бог, дали човек — сам, доброволно да се направи по-лош в някакво отношение? Ако това е невъзможно, тогава –

заключава Сократ—Платон— Бул – всеки бог, бидейки най-прекрасен и съвършен, винаги пребивава в неизменна форма.” Проверката на съответната формула се свежда до няколко десетки сметки с нули и единици, но може да се ускори, като се използват някои правила – така всъщност постъпва и самият Бул.

Тези два примера ни вдъхват надежда, че логиката, превърната в математика, е способна да даде критерии за правилността на разсъжденията. Отделен въпрос е, че нямаме критерий кога изобщо е налице разсъждение — твърде много трудности ни сервира човешкото многословие, призвано най-често да прикрие липсата на мисъл. Но да допуснем, че сред думите достатъчно ясно изпъква логическата канава във вид на формула. Тогава възниква резонният въпрос, как да познаем дали тя е логически закон, или не е. Аналогични въпроси се пораждат във всяка математическа теория – теорема ли е дадено геометрично твърдение, тъждество ли е някакъв алгебричен израз, има ли решение дадено уравнение и т. н. Съблазнително е да можем да отговаряме на подобни въпроси, но не е без значение с какви средства ще търсим отговора – ако за да проверим някакво разсъждение, ще трябва да правим друго, по-сложно разсъждение, далеч няма да стигнем. Желателно е значи да притежаваме такъв “индикатор на истинността”, който да не изисква от нас никаква изобретателност. В противен случай винаги ще остава място за колебание – ние ли не сме били достатъчно находчиви, та не успяваме да докажем формулата, или тя действително не е вярна. Затова трябва да се стремим към такива процедури, които да са чисто механични и не изискват никакви интелектуални усилия.

Впрочем ситуацията ни е позната и вън от математиката. Нима нямаше да въртим до безкрайност кубчето на Рубик, ако любезните автори на ръководства не ни бяха предоставили десетки алгоритми за подреждането му? – Вместо да разсъждаваме над всеки ход, че и да мислим за следващите десет, достатъчно е да изпълняваме съвестно инструкциите и с няколко движения на ръцете или ще получим желаните едноцветни стени, или ще разберем, че някой шегаджия е отлепил две от квадратчетата и ги е разменил, а тогава кубчето никога няма да се подреди докрай. Ако можехме да измислим подобни процедури и за основните области на математиката – логика, геометрия, алгебра и т. н., щяхме да решаваме и най-трудните задачи, без да разчитаме на изключителната си интелигентност.

Ето че стигнахме до алгоритмите. Командите, от които те се състоят, както подобава на всички команди, водят до икономия на разсъждения за сметка на някаква по-неквалифицирана дейност – четене на инструкции, вписване на резултати, сравняване на резултати, отново инструкции и все в този дух. Така част от работата на нервната система се прехвърля на двигателната, а това – всеки знае – прави живота по-лек. Когато за някакъв клас от задачи имаме алгоритъм, става излишно разглеждането им "по същество". Ставаме излишни дори самите ние, понеже може да ни замести автомат, програмиран според алгоритъма: представяме му данните от задачата и само поглеждаме за резултата! С алгоритъм в джоба умът ни пребивава в онова блаженство, което очаква тялото ни в рая.

Уви! Не сме ние първите, които са се мъчили да автоматизират умозаключенията, та да можем да извличаме законите на мисълта без всякаква мисъл. Ето какво ни обещава заглавието на един трактат, писан преди три века: *Начала и образци на всеобщата наука за организирането и умножаването на знанията, сиреч за системата на разума, според която – с известно усърдие – хората ще могат безпогрешно да съдят за истината или поне за степента на вероятност и с надежден метод ще откриват всичко, което е във властта на човека и изобщо което човешкият ум би могъл да изведе от данните, така че за няколко години — при това с минимални усилия и загуби — да допринесем за нарастване на благоденствието повече, отколкото при други условия бихме очаквали с цената на много векове и неимоверни усилия*. (При такова заглавие резюмето е излишно.) Какъв ли е авторът — маниак или гений? Изглежда е второто, защото името му е Готфрид Вилхелм фон Лайбниц.

Програмата, която ни предлага Лайбниц, е по-амбициозна и от нашата, понеже се отнася не само за логиката, дори не само за математиката, но и за "всичко, което е във властта на човека". Затова имаме право да попитаме: какво е постигнал самият Лайбниц в търсене на "всеобщата наука", какво са добавили изминалите триста години и осъществима ли е изобщо крайната цел - тоталното алгоритмизиране на човешкото познание? Нека първо видим как си е представял тази крайна цел нейният архитект. В "концепцията" за бъдещата програма под номер 8 той е включил "Началата на вечната истинност и изкуството да доказваме във всички науки, както в математиката", под номер 9 е споменато "Едно ново универсално смятане, което ще премахне всички спорове между онези, които биха го приели – то е Кабалата на мъдрите", а под номер 10 откриваме "Изкуството на откритието". Успеем ли в това начинание — тук Лайбниц изрича думите, които днес са станали крилати — "завинаги ще замлъкнат споровете, защото ще се решават въз основа на данните – спорещите ще отхвърлят препирните, понеже ще е достатъчно само да вземат перата и да си кажат: *Да сметнем!*" Че не сме успели, е съвсем ясно (по този въпрос наистина спор няма!), но че и никога няма да успеем докрай — това се разбра едва в нашия век: точните граници на безбрежния Лайбницов оптимизъм бяха очертани само преди петдесет години. Самото съществуване на граници в канонизирането на мисловните процеси е второто велико откритие в логиката — след нейното математизиране — и за него ще ви разкажа сега.

Все пак нека не започваме с лошото — онова, в което сме успели, също не е малко. Какво е например положението в логиката? Вече знаем, че в съждителната ѝ част – онази, в която твърденията бяха неделимо цяло и не са разложени на субекти и предикати, алгоритъм съществуваше, и то твърде прост: за да установим дали дадена формула е закон, беше достатъчно да прехвърлим през ръцете си няколко нули и единици, като отчитаме резултата по таблиците на логическите връзки. В предикатната логика обаче картината не е толкова розова. Бедата е там, че за твърдение от типа "x има свойството P" не можем да кажем "възможностите са две — или е истина, или е лъжа", понеже то може безброй пъти да става истина и безброй пъти — лъжа, в зависимост от елемента x (вземете за пример "x е четно"). Докато формулата на съждителната логика изискваше да извършим краен брой операции с 0 и 1, тук условията са коренно различни - нашият кратък живот няма да ни стигне, за да извършим безброй операции. Естествено бихме могли да си помагаме с различни хитрости – да свеждаме едни закони до други, да модифицираме законите, за да получаваме нови, както постъпваше и Аристотел, когато доказваше своите силогизми… Но ако искаме да автоматизираме на свой ред и този процес, за да не ни се налага да проявяваме изобретателност в търсенето на хитрости, нали пак ще е необходим алгоритъм – алгоритъм за доказателство или нещо подобно, а дали той съществува? Специално за силогистичните разсъждения това отново е възможно. Привидно работата изглежда проста – основните верни силогизми бяха точно 19 и лесно можем да ги разпознаваме по картотеката на техните портрети. Усложненията обаче идват от това, че понякога в разсъжденията са зацепени във верига голям брой силогизми с взаимно прехвърляне на субекти и предикати, а тогава проследяването на веригата силно се затруднява. Как бихте отговорили например на въпроса, поставен от първия популяризатор на новата "символична логика", слабо известния преподавател по математика Чарлз Доджсън, широко известен под името Луис Карол: "Ако се знае, че щом решавам дадена логическа задача, без да охкам, значи я разбирам, но предпоставките в този силогизъм не са в реда, с който съм свикнал, а от никоя лесна задача не ме боли глава, но изобщо не разбирам задачите с разбъркани предпоставки, а пък никога не охкам от задача, от която не ме е заболяла главата, то следва ли от всичко дотук, че този силогизъм е бая труден?"* Възможна ли е механична проверка и за такива "суперсилогизми"? - Да, не е проблем да заместим субектите и предикатите с различни букви, по-нататък буквите – с някакви числа (по някакви правила), след което калкулацията (въз основна на някакви инструкции) ще покаже дали разсъждението е логически безупречно. Такива правила и инструкции са формулирани от Лайбниц и именно с тях бяха свързани неговите въжделения за "всеобщата наука". Излиза, че ако в разсъжденията си се задоволяваме само със силогизми, вратите на Лайбницовия рай ще бъдат отворени за нас.

Действителността обаче е по-жестока: видяхме, че математическите разсъждения не се състоят само от силогизми — предикатната логика в пълния ѝ обем не съвпада със силогистиката. Тогава? Отговорът, който даде нашият век, може да ни изглежда обезнадеждаващ, но и от такива отговори има полза - поне вече знаем какво е безсмислено да търсим: алгоритъм за разпознаване на логическите закони няма, и то не защото не се е родил втори Лайбниц, който да го открие, а просто защото такъв алгоритъм не съществува "в природата". Най-различни фрагменти на логиката притежават съответни алгоритми – казахме за съжденията, за силогизмите… Можем дори да излезем от кръга на силогистичните схеми, като свързваме обектите и техните свойства в произволни формули — пак съществува алгоритъм, по който да разпознаваме законите. Но ако разглеждаме *само свойства*! Започнем ли да задаваме въпроси за *отношенията* между обектите – тогава вече никакъв Лайбниц не може да ни помогне.

Следователно за някои дялове от логиката проверката за истинност се свежда до рутинни процедури, но за цялата логика това е невъзможно. Определени типове формули можем "машинално" да проверяваме, както мечтаеше Лайбниц, но извън тези типове – а точно там са по-интересните логически закони — трябва да подхождаме "конкретно". Неизбежно е тогава да се попитаме: Това куриоз на

* КЭРРОЛ, Л. 1973. Символическая логика. *В:* КЭРРОЛ, Л. *История с узелками*. Москва: Мир, 1973, с. 300.

логиката ли е? Само тя ли е толкова опърничава, та към всяка отделна формула трябва да имаме “индивидуален подход”? Как стоят нещата, да речем, в алгебрата? Можем ли само като хвърлим поглед към външния вид на уравнението, да познаем има ли то решение с цели числа, или и тук ще трябва на всяко поотделно да му търсим “чалъма”? Отговорът на този въпрос се получи едва в наши дни: не можем. Не съществува алгоритъм, по който да разбираме има ли уравнението целочислено решение. Съжалявам, ако с това съобщение съм разочаровал ловците на “великата теорема на Ферма”, но е така: няма обща рецепта, по която те да си спестят мъките и да разберат решимо ли е с естествени числа уравнението $x^n+y^n=z^n$. Ето и друг пример, който засяга вече самите алгоритми: Всеки знае, че компютрите работят по програми, т. е. по алгоритъм, кодиран на разбираем за тях език – каквото им изкомандваме, това ще изпълнят. Много лесно е да направим програма, по която компютърът да работи безкрай – накарайте го непрекъснато да прибавя единица и после да я вади. Разбира се, шегата веднага ще бъде забелязана, но тя може така да се скрие сред други, фиктивни сметки, че да не бие на очи (напоследък чудесна работа вършат компютърните “вируси”). Фактът е следният: не съществува алгоритъм, по който да разпознаваме кога дадена програма ще спре поради получаване на резултат и кога ще работи безкрайно време.

Последният пример, който ще дам, е интересен с това, че изглежда малко встрани от “истинската” математика. Знаете какво представляват тълковните речници – в тях всяка дума е обяснена с израз, който се състои от няколко други думи, но има същия смисъл като нея и затова може да я замества в произволни текстове. Например срещу “квадрат” речникът ще ви посочи “четириъгълник с прави ъгли и равни страни”. На друго място пък ще прочетете, че “четириъгълник с прави ъгли” се казва “правоъгълник”, а “четириъгълник с равни страни” – “ромб”. Това ви дава право вместо “квадрат” да пишете както “правоъгълник с равни страни”, така и “ромб с равни ъгли”. Разбира се, речникът може да е толкова сложен, а заместванията на едни изрази с други – толкова много, че доста да се чудим дали два конкретни израза са синоними (според нашия речник), или не. Математиката доказа, че нашето чудене може да бъде съвсем основателно: съществуват “речници” (разбира се, изкуствени математически), за които няма алгоритъм за разпознаване кога два израза са равни по смисъл. Такъв речник не ще ви съобщи в увода си правилата, по които да разбирате дали два сложни израза казват едно и също — колко и кои страници ще прелиствате, за да установите това, зависи само от вашия усет. Ето ви още един пример, когато спорът не може да се реши със смятане по директива.

Последните примери бяха от доста различно естество, но имаха и много общо помежду си: във всичките ставаше дума за някакво свойство, което не може да бъде открито у конкретния обект по чисто механичен път. Такива свойства се наричат *алгоритмично неразпознаваеми.* В единия пример не съществуваше алгоритъм за решаване на въпроса, дали конкретна формула на предикатната логика е закон, във втория — дали дадено уравнение притежава целочислено решение, в третия – резултатна ли ще е програмата на компютъра при вложените в него данни, в четвъртия – синоними ли са два фразеологизъма. Изброените факти лесно могат да бъдат преведени от езика на свойствата на езика на съвкупностите, понеже

въпросът, притежава ли някакъв обект интересуващото ни свойство, е еквивалентен на въпроса, влиза ли този обект в съвкупността на елементите с това свойство: принадлежи ли дадената формула на класа на логическите закони, принадлежи ли конкретният фразеологизъм на даден "синонимен ред" и т. н. Разнообразието в примерите ни кара да подозираме, че нашата епоха е открила някаква нова характеристика на отношението между класа и неговите елементи, или все едно между обекта и неговите свойства. По всичко личи, че тя е универсална, защото какво друго има на тоя свят освен класове от елементи, които на свой ред са класове от собствените си елементи? Ако това е вярно, би трябвало да разграничаваме два типа знание за съвкупностите в зависимост от начина, по който те разкриват състава си, и съответно два типа знание за свойствата на обекта според основанията, на които му ги приписваме. В единия случай нашето знание е породено от съвестното придържане към алгоритмична процедура, в другия е плод на творчество и голяма доза шанс. Нека се огледаме наоколо и видим каква е тази характеристика.

Вече няколко пъти казах, че сред всевъзможните логически формули (или според традиционната терминология – логически форми) особено ценим онези, които са винаги верни; нарекохме ги логически закони. Но за да установим, че нещо е винаги вярно, трябва да притежаваме доказателство за това. Самото доказателство може да има различен външен вид — да е преобразуване, редица от изводи, проверка, заместване и т. н., но във всеки случай ние не трябва да изпитваме никакво съмнение дали рисунката от математически знаци, която ни се представя за доказателство, наистина е доказателство, или е негова имитация. Изискване, добре познато в съда: камата, която вече имах случай да спомена, се приема за доказателство, а магнетофонният запис - не. Следствието дири доказателства за вината, въз основа на тях съдът – понякога след дълги колебания –се произнася по характера на деянието и степента на виновност, но не се двоуми дали собствените му мотиви представляват доказателство. Както виждаме, аналогията между логиката и съда става доста пълна (как да не се сетя за ефектната вестникарска метафора “пред съда на логиката”!): ние също добре знаем *кое* е доказателство, но не знаем *има ли* доказателство. Всъщност така е и в цялата математика – притежаваме средства, с които да разпознаваме доказателствата, но не винаги имаме средство за разпознаване дали дадена хипотеза притежава доказателство, т. е. дали е теорема.

Какво да правим тогава, като знаем, че логическите закони не са проверими по единно предписание, а много ни се ще да разберем законно ли е някакво разсъждение? Ако неговата схема е от тип, който допуска алгоритъм за разпознаване на верността, например, ако е от чист съждителен тип, добре: с малко сметки ще стигнем до отговора. Ако схемата е такава, че не попада в сферата на действие на никакъв алгоритъм, но сме я открили доказана някъде от някого, пак добре. Как да постъпим обаче, когато не я открием в списъка на известните ни логически закони? Означава ли това, че нашият логически справочник е прекалено беден и трябва да се погрижим за по-богат? Или означава, че просто никой досега не се е помъчил да докаже въпросната схема и туй трябва да сторим ние? А може би никой не я е доказал, защото тя е невярна?

Очевидно не можем да се надяваме предварително да приготвим пълния списък на допустимите логически средства, та винаги, когато потрябва, да търсим в него скелета на интересуващото ни разсъждение. Това е все едно да теглим безкрайно въже – логическият инвентар няма край. По-перспективно изглежда едно по едно да конструираме всевъзможни доказателства (нали за разпознаването им има алгоритъм!), докато се натъкнем на въпросната схема. Ако тя е закон, това все някога ще стане. Ами ако не е? Тогава има опасност да се пренесем в театъра на абсурда и да чакаме Годо, защото винаги надеждата, че Доказателството ще се появи "ей сега", ще е примесена с подозрението, че то изобщо няма да дойде.

Проблемът, пред който сме изправени, наистина добива универсален характер, щом се сблъскваме с него дори на трамвайната спирка. Ежедневните ни колебания - да тръгнем пеша или да почакаме "още малко" — имат същата природа, както и пълната ни неизвестност около появата на доказателство: при възможността трамваят никога да не дойде деветдесет минутното чакане също толкова облекчава нашата участ, колкото и десетминутното. Фактът, че в такива случаи опашката се разделя на две половини и едната е убедена, че "трамваят *явно* вече ще дойде", а другата си казва, че "щом не идва толкова време, *явно* нещо е станало и той изобщо няма да дойде", показва, че населението има, общо взето, верен усет за двата вида съвкупности, които наблюдавахме във "висшите материи".

В математиката подобни ситуации — колкото щем. Търсим, да речем, числа с някакви свойства; "тестуването" на всяко число поотделно (поне на теория) не представлява проблем и затова можем да проверяваме наред: 1, 2, 3, 4 и т. н. "И така нататък", но докога? Ако съществуват числа, каквито търсим, с нашия тест рано или късно ще ги открием, но ако не съществуват, тогава и след един милион проби ще се окажем в същото положение, както и след третата: безкрайността ще е пред нас непокътната и ние никога не ще узнаем истината за търсените от нас числа — че ги няма. Представете си овчар с безброй овце, който седи в кошарата и придърпва овцете една по една — така той ще отмята наличните, но няма да установи никоя липса!

Повечето игри също съчетават пълната известност с пълната неизвестност. Например шах: ходовете в него, колкото и да са разнообразни, са подчинени на строги правила — без случайност, и благодарение на това ние във всеки момент знаем кои ходове са позволени, а следователно знаем и как би могла да изглежда на следващия ход шахматната дъска. Ако обаче изберем някакво конкретно разположение на фигурите, не винаги можем да предвидим със сигурност съществува ли развитие на партията, което да доведе до него. С други думи, не можем да заявим категорично: "Това е възможно да се случи в играта, а онова — не." Така е, както се казва, и с жените…

Мисля, че картината вече е ясна. В най-различни области по определени правила се пораждат някакви класове от обекти — геометрични теореми, логически закони, конфигурации върху игралната дъска, стойности на алгебрични функции, житейски ситуации, човешки реакции и какво ли още не. Правилата не допускат двусмисленост в разчитането им, а резултатът от тяхното прилагане е еднозначен. Тази тяхна ефективност гарантира, че всеки елемент на класа ще се роди на бял свят, макар да не се знае кога. Все някога… Всъщност за нашите теоретични разсъждения периодът на "бременността" няма никакво принципно значение — дали е 280 дена или 280 века: можем да чакаме произволно дълго, но не и вечно! По тази причина нещата се обръщат наопаки, когато се заинтересуваме принадлежи ли на класа някакъв произволно избран обект и няма алгоритъм, който да ни помогне. Видяхме, че ако отговорът е положителен, той винаги ще стигне до нас, макар и с неопределено закъснение, но ако е отрицателен, не ще го получим нивга. Когато обаче за класа съществува алгоритъм за разпознаване, ние последователно получаваме не само елементите на класа, но и елементите извън него — те са онези, които алгоритъмът отхвърля. Усеща се качествената разлика между двата типа класове, нали? — Докато за едните постепенно узнаваме какво влиза в тях, за другите научаваме още и какво остава извън тях. А да знаем точно кой елемент къде е — дали вътре, дали отвън, да познаваме и класа, и остатъка — какво повече можем да желаем? Така казва и Учителят Кун (Конфуций) в *Лун-юй* (II 17): "Да знаеш какво знаеш и да знаеш какво не знаеш — това означава да знаеш."

Разказът ми за логиката върви към своя край. Не мисля, че тематиката, в която навлязохме, бе достъпна само за посветени. Смея дори да вярвам, че главните резултати в нея, макар и видени от птичи поглед, са достойни за общата култура на всеки, който смята, че я има. А за целта е нужно толкова малко, нека го повторя: науката логика да стане учебен предмет.

Започнала още с прохождането си да търси закони — законите на мисленето, логиката и в зрялата си възраст, приела името "метаматематика", продължава да открива закони, но това са вече законите на цялата математика. Отново метафората се оказва напълно оправдана: ролята на всяко законодателство е да формулира точните граници между позволеното и забраненото и тук логиката не прави изключение. Току що видяхме какво разрешава тя и какво забранява, когато математиката ни се явява в единия си образ — на смятане. Със съжаление трябва да констатираме, че най-важните области — самата логика, аритметиката, програмирането, алгебрата и т. н. — не допускат алгоритми, по които да решаваме всички задачи (освен ако задачите не са от строго очертан кръг). Впрочем кой знае дали не е всяко зло за добро — не би ли станал прекалено скучен животът, ако за всеки въпрос съществуваше инструкция, по която да получаваме отговора? А може би тогава творчеството щеше да се проявява в съставянето на инструкции? — Уви, не, защото в такъв случай би съществувала една Генерална инструкция за писане на инструкции по произволна тема…

Сега остана да видим как изглежда математиката, когато ни се явява в своя втори образ — на доказателство. Портретът, с който разполагаме, е дело пак на логиката — другото ѝ велико дело заедно с прокарването на границите на изчислимостта. Бъдете спокойни, няма да се връщам към Талес и Евклид, но от възхвала на техните имена не мога да се въздържа: понятието “доказателство”, което те са ни завещали, не е претърпяло съществени модификации до ден днешен. Въпросът е кога съществува то. Вероятно ще ви се види странно самото питане — когато съществува доказателство, налице е теорема. Няма доказателство — няма и теорема, какво повече? Все пак нека не бързаме със заключенията, преди да видим за какво служи доказателството. И тук очаквам светкавичен отговор: за да установим истината. Как иначе ще се убедим, че сборът от ъглите във *всеки* триъгълник е 180°, щом триъгълниците са безброй? Можем ли последователно да събираме нечетните числа от 1 до безкрай, за да се уверим, че винаги при добавянето на поредното събираемо получаваме точен квадрат? Да си спомним, че доказателството е максимално прост процес не само защото е крайно (противно на проверката-”оглед”, която е безкрайна), но и защото е алгоритмично разпознаваемо. Така обаче въпросът се измества от доказателствата в математиката към обектите на математиката: истината *за какво* установява тя? С този въпрос има опасност да пропаднем във философската бездна, в която много мислители — наши предшественици и съвременници — са потънали и още не са излезли. Съществува ли извънматематическа реалност, къде “живеят” обектите на математиката, например числата, и обективни ли са те — това са все въпроси, които оставям на друг желаещ. Аз пък в замяна няма да се скрия вътре в абстрактната аксиоматика, като заявя, че вън от нея няма нищо, а компромисно ще допусна, че аксиомите аксиоматизират нещо, което преди е било извън тях, но това "външно" ще го търся не във философията, а пак в математиката.

Нека се спрем на най-естествените математически същности – числата, наречени "естествени". Преди 30 000 години неизвестен нам ловец е оставил 55 резки върху подраменната кост на вълк. Това е първото стигнало до нас свидетелство за раждането на Homo mathematicus. Оттогава нататък човечеството ще започне да брои: едно, две, три... Въпреки че по-прости действия от извършените върху тази кост не можем да си представим, дълбоко в "душата" си аритметиката завинаги е останала там, при нанасянето на поредната резка. Неимоверното разрастване на математиката е в същността си увеличаване на знанията за тези черти. Десетте арабски цифри не добавят нищо към "едноцифреното" записване на първобитния ловец, а само го скъсяват. Прибавянето на резките от друга кост към първите е равносилно на събиране, а многократното преписване на всички резки от една кост с отмятане на броя на преписите според резките на втора кост е умножение. Светът се развива, дидактиката – също, но не и аритметиката: ние с вас по понятни причини не сме белязали кости на вълци, но онова, което са ни карали да си представяме

в

отделенията, не е по-различно – две кошници с ябълки, изсипани в трета, дават сбора, а неколкократното изсипване на една и съща кошница дава произведението. Дидактиката продължава да се развива и нашите деца в детските градини вече си представят множества вместо кошници. Ето я извънаритметичната реалност: можем да приемем, че зад числата стоят някакви стандартни множества с различен брой елементи, абстрахирани от конкретната природа на елементите. Тези “числа” (всъщност модели на числа) могат да бъдат “събирани” и “умножавани” (кавичките ни подсещат, че става дума за действия с множества, а не с числа, понеже операциите с числа-модели са само модели на операциите с числа), а аксиоматичната система на аритметиката е призвана да обхване с доказателства истините за тия “числа”. Излиза, че нашата представа – вродена или придобита, не се наемам да уточнявам – за редицата на естествените числа като за наредени едно до друго топчета – това първо, това второ и т. н. – достатъчно сполучливо се имитира от определен стандартен модел, състоящ се от множества.

Следователно всички свойства на числата могат да бъдат проверявани – и доказвани! – в системата от множества. Лошото е само, че множествата все пак не са числа, а... множества, които се правят на числа! Аритметичният език, на който казваме, че 2+2 = 4, съдържа имена на числа, равенство между числа и операции с числа (+ и .); езикът, на който изказваме *смисъла* на аритметичния факт, се състои от множества, подмножества, равенство между множества, принадлежност към множество, обединяване на множества в едно и др., като самите “числа” са построени чрез надстрояване на едно единствено, и то твърде специално множество – което не съдържа никакви елементи (изглежда, че освободени от материални асоциации са само множествата, породени от нищото). Чувстват се разликите в лексиката, нали? Накратко казано, *съдържанието* на аритметиката е в теорията на множествата. Подчертавам това, за да не се спекулира, както често се прави, с противопоставянето между съдържателни и формални разсъждения. Виждаме, че и двете са “формални”, понеже и двете са математически, но принадлежат на различни математически теории, като едната е модел на другата. Всъщност въвеждането на семантика е превод от езика на аритметиката на езика на множествата, а всеки превод, както знаем от художествената литература, се различава от оригинала – кога към по-добро, кога към по-лошо. Така е и тук: откъде да сме сигурни, че “преводачът” не добавя нещо от себе си или че няма да срещнем бележка: “непреводима игра на думи”? Неприятното е, че не само не сме сигурни, ами дори сме сигурни в съществуването на непреводими пасажи. Най-ужасяващото е, че непреводимото е повече от преводимото. Несравнимо повече! Истините, които могат да бъдат установени за числата в езика на теорията на множествата, са повече от истините, които можем да докажем в аритметиката. Това откритие – най-сензационното в математиката и като всяка сензация най-податливо на некомпетентно префасониране – ще бъде разгледано от различни страни в няколко от следващите сказки. Затуй ще се огранича само с мирогледните последици от него.

Какво правим, когато при превеждане от един език на друг изпаднем в подобна ситуация? Да речем, преводът е от китайски на български и срещаме думата "дао". Никакви обяснения не помагат, понеже не само в езика ни, но и изобщо в България няма *дао*. Единственият изход е да се вземе понятието, без да се превежда, т. е. като нова дума чуждица. По такъв начин разширяваме българския език и съответно получаваме възможност да изказваме истини, които по-рано са били неизразими, например истините за "дао". В математическия език, от който превеждаме – езика на множествата, също откриваме истини за числата, които, за да станат истини в аритметиката, трябва да се вземат наготово – както чуждиците. За нещастие броят на необходимите чуждици надхвърля всякакви въобразими граници. Целия език да напълним с чуждици – пак няма да стигне, защото неизказаното ще е повече. Каквито и свойства на естествените числа да вземем за изходни, както и да подбираме аксиомите за тях, около стандартните нанизани на шиш топчета неотлъчно ще витаят техни фантоми – множества-апендикси, които са неотделими с думите от аритметиката. Безброй системи носят едно и също име – "редица на естествените числа" – и по тази причина са различими само след вглеждане във "външността" им, но не и по "документ" – нещо като близнаци, кръстени с еднакво име. Опитаме ли се да впишем отличителните черти на някоя от системите, никога не ни стигат думите, защото непрекъснато изникват "близнаци" с вписаните вече белези. Онова, което в "реалността" се вижда с просто око, не се поддава на описание. Забелязваме, например, че заедно с обикновения наниз от числа има и такива, които се състоят от много безкрайни в двете посоки низове, завързани последователно. В такива фантоми между някои двойки числа са разположени безброй други числа, което за цели числа е твърде неестествено, но този факт не можем да го изразим в аритметиката, понеже там няма дума "безброй" – има сама "брой". Свикнали сме също да си представяме, че множествата от естествени числа, обособени по някакъв признак, могат да включват произволно големи числа, но винаги в тях има най-малък, начален елемент; във фантомите обаче такъв най-малък елемент не винаги съществува – те съдържат множества, безкрайно "разперени" в двете посоки, което според нашата представа е странно, защото "наляво" всичко е на крайно разстояние от нулата.

Този факт също не може да бъде описан (с цел да бъде премахнат), понеже в езика на аритметиката липсва думата “множество”. Излиза, че аналогията с превода на естествен език е по-дълбока и по-сложна, отколкото подозираме, тъй като езикът, от който превеждаме, е коренно различен от всички човешки езици и всъщност само условно може да се нарече “език”: това е *действителността*. Колкото можем с думи да опишем панорамата около нас, толкова е възможно на аритметичен език да опишем числата. И в двата случая поради липса на думи се налага да сочим с пръст, а това означава излизане от рамките на нашия език. Такава ни е съдбата – безброй неща ще видим само ако вдигнем глава от писания текст!

Щом е невъзможно вкарването на цялата числова реалност във формална система – каквато и да е тя, стига само да се покрива с нашите разумни представи за доказателство, – може би да се откажем от гонене на сянката си и да се задоволим с оная аритметика, с която благополучно сме завършили училище? Тя обаче не е чиста аритметика, понеже твърде често в нея се говори за множества от числа. Спомнете си централния ѝ принцип – за математическата индукция: “Ако едно множество съдържа единицата и заедно с всяко число съдържа следващото, то съвпада с множеството на всички естествени числа.” Благодарение на този принцип обликът на редицата от числа се оформя до желания от нас, а фантомите се стопяват, но резултатът е постигнат с въздействие отвън. Честно казано, вместо аритметика сме изграждали система от множества, която да играе ролята на аритметика – фактически сме строили нейния стандартен модел. Всичко щеше да е наред, ако множествата бяха еднозначни същности, на които да стъпим, а за беда те самите са далеч по-сложни понятия от числата.

Както ще видим от следващите сказки, множествата съвсем не са раят на математиката, защото и те съжителстват с фантоми и призраци. Остава ни тогава изобщо да се откажем от “изначалната интуиция” за числата и да станем формалисти, като въпреки обявеното ми намерение се скрием в някаква удобна аритметична аксиоматика, която да е достатъчна за насъщните ни нужди, и без да поглеждаме навън, заявим: “Това е, друго няма.” Числовата реалност обаче отново ще се прояви, макар да си затваряме очите за нея, понеже ще поражда твърдения, които нашата формална система не ще може нито да докаже, нито да опровергае. Това са твърденията за стандартния модел – колкото и да се правим, че не го забелязваме, всяко твърдение, което е вярно за него, но не и за неговите фантоми, ще бъде неутрално спрямо нашата аритметика, понеже тя по никой начин не различава моделите. Твърде неприятна перспектива: на някои въпроси не ще можем да отговорим нито "да", нито "не", и то не защото не сме в състояние да познаем, а просто защото никой от двата възможни отговора не се съдържа в системата. В нея не са доказуеми нито положителният отговор, нито неговото отрицание и въпросът увисва във въздуха. Дори да добавим такова твърдение (или неговото отрицание) като допълнителна аксиома (все едно, че сме я били забравили), съвсем малко ще си подобрим положението, понеже безброй други въпроси ще останат без отговор. Сякаш се изкачваме с по едно стъпало и разширяваме хоризонта си, но колкото и стъпала да преодолеем, на каквато и височини да застанем никога не ще видим цялата полусфера на Земята: точките по екватора винаги ще остават извън зрителното ни поле. За да ги обхванем с поглед, трябва да се отдалечим на безкрайно разстояние. В аритметиката това означава да вземем безброй аксиоми, но тогава по-просто би било да обявим за аксиоми всички верни твърдения и изобщо да не се занимаваме с доказателства. Този номер обаче не минава, понеже ще се наруши основното изискване към формалната система – няма да можем ефективно да разпознаваме аксиомите от неаксиомите. Отново мат!

Ако в дадена формална система съществува твърдение, което нито е доказуемо, нито е опровержимо, системата се нарича непълна, а твърдението – *неразрешимо* (всъщност неразрешим е въпросът, свързан с него). Понякога между всевъзможните модели на системата има един привилегирован, който се покрива със смисъла, влаган от нас в нейните символи; наричаме го *стандартен*. Което и неразрешимо твърдение да вземем, или то самото, или неговото отрицание ще бъде вярно в стандартния модел, и то по тривиални причини, просто защото всяко твърдение е или вярно, или невярно. Това показва, че някои истини – истини според интуитивната ни представа за смисъла на формулите – ще остават недоказуеми в системата, т. е. тя ще е непълна по отношение на стандартния модел, а следователно и по отношение на естествената си семантика. Резултатите, за които разказах преди малко, могат да се изкажат с две думи така: аритметиката е непълна и непопълнима. Когато преди близо 60 години Курт Гьодел установи този факт, примерите за неразрешими твърдения, които той посочи, имаха един принципен недостатък: вместо за числа говореха за собствената си недоказуемост или пък за непротиворечивостта на аритметиката, т. е. фактически не принадлежаха на аритметиката, а на метаматематиката. За да се превърнат от твърдения *за* аритметиката в твърдения *на* аритметиката, т. е. във формули, беше необходима допълнителна операция – кодиране на метаматематическите понятия “формула”, “аксиома”, “доказателство” и т. н. Така отношенията между думите се заменят с отношения между техните номера и твърденията добиват типичния аритметичен вид, например “за всяко число е изпълнено…”, но многоточието ни най-малко няма прозрачен аритметичен смисъл. Разбира се, отникъде не следва, че непълнотата на теорията ще се проявява само но отношение на странни, завързани “на възел” твърдения, които изказват нещо за самите себе си, но откриването на нормални аритметични твърдения, които да са неразрешими, се оказа доста трудна работа. Едва в наши дни бяха получени примери за недоказуеми верни твърдения, в които се говори за числа, а не за доказателства. При това примерите съвсем не изглеждат строени специално за целта, а са взети от ежедневието на практикуващия математик Един от тях представлява твърде любопитна драматизация на древногръцкия мит за Херакъл* и затова мога да го изложа без формули.

Както знаем, вторият от подвизите на Херакъл е умъртвяването на лернейската хидра, която не само била с много глави, но и на мястото на всяка отсечена изниквали две. В нашия пример ще се говори за специална порода на Hydra Lernaea, селекционирана чрез кръстосване с друго животно от същата епоха -Медуза (Medusa Gorgonea), от чиято “главна” глава, както си спомняте, са излизали шиите на многобройните ѝ помощни глави. Така в новия биологичен вид от всяка глава могат да тръгват шиите на произволен брой други глави, от тях – шиите на трети и т. н. Ако огледаме хибрида “от глава до пети”, ще открием, че той има многоетажна структура, като всяка “крайна глава” е свързана с тялото чрез единствена верига от шии и междинни глави. Особености се наблюдават и в механизма на регенерация: след отсичане на глава (естествено крайна) новите не изникват от същото място, а от главата, предходна по посока на тялото; при това се репродуцира цялото разклонение, на което е принадлежала отсечената глава (без нея самата). Законът на мултиплицирането е още по-жесток:

* *Мифы народов мира. Энциклопедия в двух томах.* 2. изд., Москва: Сов. энц., 1987 - 1988.

разклонението на втората отсечена глава се удвоява, на третата се утроява и т. н. Описаните биологични свойства лесно могат да се преведат на аритметичен език, като се номерират главите. Въпросът е: Ще успее ли Херакъл да обезглави кръстоската Hydra Lernaea x Medusa Gorgonea? Може да се докаже, че печеливша стратегия за него винаги съществува независимо от анатомията на главите и шиите:

първо трябва да сече главите, които стърчат най-високо (класически принцип!). Въпреки че новопоникващите глави се множат катастрофално (нали се повтарят целите им разклонения, и то в аритметична прогресия), изникването става от места, които са *по-близо* до тялото. В резултат настъпва момент, в който главите, макар и милиарди, вече растат само от тялото, а не от предходни глави и при отсичането им не поникват нови – няма откъде. След този момент обезглавяването на масата е въпрос само на време. Нека повторя: твърдението "За всяка хидра съществува побеждаваща я стратегия", преведено на аритметичен език, е доказуемо в аритметиката.

Херакъл обаче няма време да оглежда главите и да мери дължините на шиите им. Той може да сече само без да мисли. Тук на помощ му идва математиката: каквато и стратегия да възприеме, хидрата пак ще бъде обезглавена. Където и да се е намирала поредната отсечена глава, даже да е била "ниска", новоизраслите глави, макар и повече на брой, не увеличават общата височина на хидрата, затова и при най-нерационалната сеч ще дойде ред и на тях. Съответното твърдение "За всяка хидра всяка стратегия е побеждаваща", преведено в аритметиката, отново е вярно. Този път обаче то не е доказуемо в нея. Уж най-обикновена "задача с думи", уж сме я решили, а пък не сме. Така или иначе безсмъртна хидра няма, колкото и да е хитра, а

Херакъл – неумел. Доказателството на това твърдение обаче не може да се осъществи в аритметиката, а само в по-обща теория, откъдето всъщност знаем, че то е вярно. Образно казано, верността му се вижда, когато гледаме формалната система от разстояние, но не и когато сме вътре в нея. Сега можем да направим обратен превод и всичко, което преди казахме за "стандартните" цели числа и техните фантоми, да пренесем в митологията. Освен "стандартните" хидри, които са смъртни, явно съществуват извънземни, безсмъртни хидри. По тази причина твърдението "Всички хидри са смъртни" е недоказуемо – то просто е невярно. Вярното твърдение уточнява, че "Всички *земни* хидри са смъртни" (независимо от стратегията на Херакъл), но за да говорим за земно, трябва да сме допуснали съществуването на *неземно*, а това означава да излезем извън границите на Земята.

След като разбрахме, че изчислимото в математиката е затворено в твърди рамки, сега се убеждаваме, че и доказуемото е ограничено. Колкото и да разширяваме математическата теория, например аритметиката, винаги ще остават истини, които тя не обхваща: такива са най-малко истините за самата нея – както окото може да види всичко, но не и себе си, както човек не може да се повдигне за косите… Защо се получава така, че на някакъв език формулираме проблемите, а ни трябва друг, по-богат език, на който да ги решим? Дали пък самото желание да изкажем всичко не ни изпречва непреодолими препятствия? Тук логиката отново ще ни бъде полезна. Най-напред обаче искам да се уверим, че стремежът на човечеството към словесна изява е наистина универсален и се доближава до най-силния инстинкт – волята за живот (изразът "умира да говори" не е преувеличение!). Този стремеж често добива маниакални размери – например, когато започнем да излагаме чувствата си (за да скрием мислите си), но той има и психологично оправдание. Човек се чувства неуютно в свят, който не е назовал. В момента изпитвам на собствен гръб правотата на думите си, като искам, а не мога да опиша какво усещаме, когато на "онуй там" не му знаем името. А то може да е черното в тъмнината, може да е и под сърцето… Към страха от неизвестното и чувството за опасност се добавя нещо смътно, което удвоява ужаса от очакване на най-лошото, докато не разберем какво е "онуй", а това означава да разберем *как се казва* то.

У Радичков ще открием доста примери и на тази тема. Когато .ведрото само тръгва към обора и вратата сама се отваря, първата реакция на селянина е "Това не е вярно!" Впрочем и втората не е по-различна – “Не може да бъде!” Щом обаче става явно, че “нещо се бе появило в къщата му, шеташе из двора”, към чисто човешкия страх се прибавя и проблемът с името на това “нещо”. Селянинът си го и казва: “Може би е някоя нова болест по хората, дето още не ѝ знаем името!” С какво се променя обстановката, когато жена му се сеща, че това е тенец? – С нищо, а мъжът се успокоява: “Тенец ли! Що не ми каза по-рано, ами ми изскочиха всичките ангели.” Всичко потича постарому, небивалиците се роят, но неизвестното сякаш се е изпарило само защото селото знае името му: “А, та това е тенецът!”

Пак ще направя семиотическо отстъпление. Поради конвенционалната си същност (т. е. бидейки плод на споразумение) имената и изобщо знаците не са обвързани с вярност към природата на означаваното. Затова единствено изискване към тях остава да бъдат верни на самите себе си, т. е. на собствената си външност – а те друго и нямат. Вероятно от подобни съображения е продиктувана и молбата на Радичков “да поставяте ударението на последната сричка – т е н é ц” .

Никой не знае със сигурност дали мислим с думи, т. е. дали мисленето е мислено изричане на текстове, но сигурно е, че благодарение на думите светът от враждебен ни става близък. В това отношение не сме се отдалечили много от първобитните шамани. Е, вече не се надяваме да въздействаме върху предметите, като баем над техните имена, но да ги приближим чрез думите – успяваме. Единственото, с което можем да достигнем недосегаемото, е *думата*. Да познаем нещо, значи да го назовем. Наречем ли с име предмета, той става част от нас – светът е чужд, но думите са наши. Колкото назовем, толкова ще обхванем. А останалото, неназованото – съществува ли то изобщо?…

Има едни древен философски трактат, в който името е изравнено по ранг с предмета, а именуването – с творението: книга *Битие* на *Библията*. “Отдели Бог светлината от тъмнината”, четем в него и веднага след това: “светлината Бог нарече ден, а тъмнината – нощ”. “Създаде Бог твърдта” – и после: “твърдта Бог нарече небе”. “И се яви суша” — и веднага: “сушата Бог нарече земя”. В 4., 7. и 9. стих Бог твори, в 5., 8. и 10. стих именува. Ние, смъртните, също сме създадени и наречени едновременно: “Когато Бог сътвори човека, създаде го по подобие Божие, мъж и жена ги сътвори и ги благослови, и им даде име “човек” в деня на тяхното сътворение” (5:1 — 2). За втората дейност (но не и за първата!) сме упълномощени от самия Него: “Господ Бог направи да произлязат от земята всички полски животни и всички небесни птици, и ги заведе при човека, за да види, как ще ги нарече той, та, както човек нарече всяка жива душа, тъй да бъде името ѝ. И даде човекът имена на всички добитъци и небесни птици и на всички полски зверове" (2:19—20).

Ето че сме изправени пред съдбовен въпрос: изпълнима ли е възложената ни работа? Можем ли на всичко да дадем име? Колко често ни се е струвало, че сме се срещнали с невъзможността да назовем нещо, а не сме си давали сметка, че точно констатацията на тази невъзможност става негово име. Не говорим ли за "неописуем страх" с единствената цел да го опишем? Нима не поради липса на име сме нарекли единия от пръстите си "безименен" и оттогава това му е името? Не ни ли се е случвало да издумваме думи за любовта, за която нямаме думи? Ами да изразяваме неизразимата си признателност?… Какво ще излезе — че в словото си сме по-могъщи от онова всемогъщо същество, което още се чуди може ли да направи толкова тежък камък, та само да не може да го повдигне? Наистина ли — макар и по този парадоксален начин — можем всичко да превърнем в думи, или подобно на изчислимото и доказуемото ще се окажем затворени в рамки?

Думата "дума" автоматично извиква в съзнанието на европееца представата за редица от букви, които се четат отляво надясно; думите от своя страна също са включени в редици – това са изреченията, а редиците от изречения образуват текстове. Тук йерархията свършва, защото редицата от текстове не дава нещо ново, а пак е текст. Ако си затворим очите за законите на фонетиката (по-точно на ортографията), морфологията, синтаксиса и стилистиката — науките, които попечителстват четирите нива в йерархията и които за всеки език са различни, върху листа хартия ще остане само *редица от знаци*. Ясно е, че конкретната посока на подреждането им не играе никаква роля, и затова не е нужно да се съобразяваме с известния факт, че "лилипутите пишат не като европейците — отляво надясно, не като арабите — отдясно наляво, не и като китайците – отгоре надолу, а като английските дами: на верев, от единия ъгъл на страницата към другия". При толкова общо разглеждане на писмеността не играе роля и природата на използваните знаци — дали са 26-те букви на латинската азбука, дали са 49 030-те китайски йероглифа или техните 24 графични елемента. Сравненията, които правя, имат за цел да предотвратят възможните обвинения в европоцентризъм, когато постулирам, че ако един език, какъвто и да си го представяме, е годен да предава съобщения, да изразява понятия и да формулира твърдения за тях, т. е. да обслужва науката, в него задължително е втъкан принципът, с който сме закърмени: *линейно* подреждане на знаци от *крайна* азбука. Разбира се, сега думата "азбука" е съвсем условна — вместо нормалните букви тя може да включва произволни символи, цели думи, картинки и дори текстове, но схващани като неделими езикови модули (подобно на стенографските сигли). При такъв подход за "азбука" на естествения език можем да приемем целия му речник с всички форми на думите - тогава "буквите" ще бъдат няколкостотин хиляди. Съгласно *Правилника за прилагане на Закона за движение по пътищата** езикът на пътните знаци използва "азбука" със 144 "букви". Не е трудно да си представим "азбуките" на нотописа, на математическите формули и т. н.

Тук нашите разсъждения намират неочаквана подкрепа в една мисъл на великия Галилей, комуто трябва да отдадем дължимото за прозорливостта, с която я е изказал три века и половина преди нас: "Философията е написана във величествената книга, която е постоянно отворена за нашите очи — имам предвид Природата, но може да я разбере само този, който първо е научил езика ѝ и познава буквите, с които тя е написана, а нейният език е езикът на математиката и буквите ѝ са триъгълници, кръгове и други геометрични фигури."

Първото условие, което поставихме за езика — линейност на текстовете, осигурява еднозначност в разчитането им. В противен случай, както е например при пиктографията и географските схеми, или ще се блъскаме в многопосочни тълкувания, или ще се чудим откъде да започнем четенето и къде да го свършим. Отклоненията от линейното подреждане на знаците, които често се наблюдават, не са съществени, понеже винаги позволяват да се възстанови еднопосочният ред. Това се доказва от факта, че можем да ги изговорим, което е равносилно на заменянето им с редица от думи (например вместо 1:2 да стане дроб с числител, знаменател и дробна черта качени на три реда, бихме могли да пишем 1/2 или просто да кажем "една втора"). Другото условие – "азбуката" да бъде крайна, се налага също от изискването за ефективно разчитане: в противен случай няма да разбираме дали изображението пред очите ни е елемент на "азбуката". Безкрайните системи от знаци са

* БЪЛГАРИЯ. Държавен вестник бр.25 от 22 Март 1996г., посл. доп. и изм. ДВ. бр.45 от 16 юни 2009г.

илюзия, понеже над тях (или под тях) стои правило, което ги поражда, а то самото е записано в система с краен брой знаци. (Такъв е например пътен знак № 115 — “Указател за разстояние”: поради безкрайните разстояния във Вселената той крие зад гърба си безброй знаци, но всички те са текстове в “азбука”, която се състои от 30-те букви, 10-те цифри и десетичната запетая.) Езици, които излизат извън нашата схема, могат да бъдат наречени с това име само метафорично; най-известните от тях са “езикът на живописта”, “езикът на чувствата” и “езикът на любовта”.

В началото на разговора ни за имената видяхме, че наименуването е заветна цел на човечеството. Подобно на мореходците, за които кръщаването на острова едновременно означава завладяването му, и за нас превръщането на Природата в слово е равносилно на овладяването ѝ. Какво друго са откриваните от нас закони, ако не явления, описани с думи? Изразимо ли е явлението — ето го и закона, не е ли изразимо — квалифицираме го като хаотично, случайно и неподчинено на никаква закономерност. Вероятно затова приемаме обикалянето на планетите за образец на определеност, но криволиченията на историята ни изглеждат случайни, а обществото ни се струва неподредено… Така всичките ни усилия, насочени към формулиране на закони, закономерности, правила, наблюдения, описания, размисли и, разбира се, сказки, се оказват елементи от изпълнението на една грандиозна програма, която за по-тържествено ще нарека Програма за тотално вербализиране на природата, обществото и мисленето. “В началото беше Словото” — казва евангелистът Йоан и това Слово днес ние търсим.

След всичко, което казахме за езиците като системи от знаци, сега можем да заявим: единственото средство, което притежаваме за постигане на нашата цел, е образуването на текстове въз основа на крайни “азбуки”. Няма значение какви ще са езиците – естествени или изкуствени, ще си служим ли със символи или само с човешки думи, дали ще използваме строги понятия или предполагащ асоциации художествен образ – резултатите ще бъдат еднакви по външност.

На пръв поглед възможностите ни са фатално ограничени: знаците са краен брой, а същностите, които предстои да отразим, явно са безброй (стигат ни само естествените числа!). За щастие това впечатление е заблуда — спасява ни използването на все по-дълги и по-дълги текстове. Макар всеки от тях да е с крайна дължина, в своята съвкупност те са безброй. Тогава има надежда за всяка същност да намерим описание — за някои късо, за други дълго, но само ако безброят от текстове е достатъчен да покрие безброя от същности. Чувствам, че изглежда странно да се питаме ще стигне ли една безкрайност за друга безкрайност… И все пак въпросът не е лишен от смисъл, а отговорът дойде преди малко повече от век като блестящ дебют на теорията на множествата. Оказа се, че безкрайностите също имат градации. Математическата страна на този сензационен резултат ще оставя за специалната сказка, посветена на неговия автор Георг Кантор, а тук ще се спра само на философските последици, и то във връзка с желанието на човечеството да превърне целия свят в думи.

Всеки знае, че не може да седне на два стола едновременно, и това важи за произволни крайни множества: ако те не са с еднакъв брой елементи, не е възможно едното да покрие другото. Ако обаче множествата са безкрайни, това може да се случи. Естествените числа например се налагат – малко парадоксално — върху своята “половина” – четните числа, и по този начин ги номерират: 2 е “първо четно”, 4 е “второ четно” и т. н. Има още много множества, които могат да бъдат строени в редица, а елементите им – номерирани, т. е. “изброени”. Затова множествата от този тип се наричат *изброими*. Наред с тях обаче има и множества, които до такава степен са наситени с елементи, че както и да ги редим, повечето остават извън редицата. Примери за такива множества — да ги наречем *неизброими* — са ирационалните числа и точките върху правата линия.

Лесно ще се убедим, че множествата, които ни интересуват в момента — възможните текстове, построени от дадена азбука, са от първия тип. Зад израза “възможни текстове” се крие малка хитрост: няма да редим само осмислените текстове, защото не ни е по силите да ги отделим, а ще включим в редицата всички съчетания от букви. Нищо, че много от тях ще бъдат глупави, далеч повече ще бъдат безсмислени, а несравнимо повече ще са непроизносими – важното е, че не ще има комбинация от букви, която да е извън редицата. Подреждането ще извършим така: начело поставяме единичните букви в техния азбучен ред; след тях всички двойки букви, също подредени азбучно; после всички тройки и т. н. Ако езикът е българският, еднобуквените “текстове” ще са 30 и ще заемат един ред; двубуквените ще са 30x30 и ще се поместят върху една страница; трибуквените – на брой 30^3, ще запълнят малка брошурка, четирибуквените – доста дебел том, петбуквените — рафт и така нататък с умножаване по 30. Ясно е, че по този начин ще напълним Вселената с труднопроизносими безсмислици, но сигурно сред тях ще бъде всичко, което някога е било написано, което се пише в момента и което ще бъде написано някога. Естествено моята сказка също вече е заела своя номер в редицата. При нашия принцип на номериране той зависи само от общия брой на буквите в нея и от мястото, което тя получава при азбучното подреждане на всевъзможните текстове с нейната дължина. Едва ли някой ще седне да брои буквите в сказката ми, но има други текстове, за които това отдавна е направено. Например в "арамейската универсална текстова редица", която се гради върху 22 букви, в групата с номер 1 152 207 ще открием оригиналния текст на Стария завет и там той ще е една от всичките $22^{1\,152\,207}$ комбинации с неговата дължина. Преди това обаче в групата с номер 78 100 ще прочетем книга Битие, като покрай нея ще прочетем и вариантите, които се различават от каноничния текст с по някоя печатна грешка, ще срещнем и съвсем богохулно съдържание, но огромната маса ще са чисти безсмислици. Има нещо вълнуващо в нашата редица, като си представим само, че в нея са описани всички събития во веки веков – там е целият утрешен вестник (без снимките!), и другиденшният също… Сякаш в търсенето на нашите жалки закони сме обречени да откриваме послания, които някой далеч преди нас е записал някъде във "величествената книга на Природата".

Виждаме как всичко, на което е способен езикът, се води под номер в някаква редица: всевъзможните имена, изречения, описания, трактати, романи, формули, партитури, … Една редица е "българска", друга - "английска", трета - "аритметична" (тя съдържа всички формули на аритметиката) и т. н. Следователно каквито и да са езиците – и лаконични, и разточителни, всеки от тях се вмества в собствената си редица, а изразните му средства се изчерпват с различните "парчета" от нея. Понеже редицата се състои от последователно долепени символи, казваме, че структурата на езика е *дискретна*. Оттук веднага получаваме търсения извод – колкото универсален, толкова и отрезвяващ: езиците могат да отразяват само дискретни множества. Всички такива множества обаче са изброими. Какво да правим тогава с неизброимите? – Те явно няма да са изразими с никакъв тип "думи". Не ни остава нищо друго освен и ние като Еклисиаста (1:8) да възкликнем: "Човек не може всичко да изкаже!" А най-естествените съвкупности, в които буквално сме потопени, са все неизброими: видимите форми, контурите на предметите, нюансите в осветлението, оттенъците в колорита, звуците, размерите на телата, движенията, моментите на времето, да не повтаряме за ирационалните числа и точките върху правата… Във всички тях преходът от елемент към елемент е непрекъснат, без скок през празно пространство и затова се казва, че те имат структурата на *континуума*. Сега забелязваме, че пропастта между “дискретните” изкуства (словесните) и “континуалните” (онези, които притежават език само в метафоричен смисъл) се дължи на причини, твърде отдалечели от изкуствата и отвеждащи чак в теорията на множествата. Това до известна степен оправдава популярната практика музикалните изпълнения да се описват с речника на изобразителните изкуства и обратно (например да се откриват в първите “ярки багри”, а във вторите -”мажорни гами”), но като вземем предвид, че за посредник и в двата случая се използва словото, стават обясними както наивностите при представянето на изложби и концерти — все континуални изяви, така и бляскавите победи на литературната критика — макар не винаги дискретна, но отразяваща дискретно явление.

Общият резултат на Кантор съвсем точно определя границите на изразимото в езика: ако изходното множество е изброимо, множеството, което се състои от всички негови части, вече няма да е изброимо. По-полезна за целите ни ще е следната еквивалентна формулировка: *елементите* на всяко изброимо множество могат да бъдат наименувани, но не и техните *свойства* — никой език не би стигнал само за да ги наречем, а камо ли да ги опишем изчерпателно. Думите пресъздават несравнимо малка част от цялото, както и репродукцията е само приближение към истинската картина: и най-дребните фрагменти на картината са пак картина, докато репродукцията под лупа ще се превърне в мозайка от монохромни кръгчета, плуващи в белота.

В случая не е толкова интересно, че едно човешко творение, каквото е езикът, се оказва недостатъчно, за да обхване физическата действителност — преди всичко не е сигурно, че пространството и времето не са дискретни и дори крайни, а тогава проблемите с описанията биха отпаднали автоматично (поне на теория). Парадоксалното е, че безкрайните множества, за които говорим, са все мисловни конструкции (макар да изглеждат заети от действителността) и не са по-малки абстракции от самата безкрайност, затова ние имаме някакво описание на обектите, които уж сме измислили, с цел да не можем да опишем. Те няма къде другаде да съществуват освен в езика, а са извън него! Странно е как получаваме идея за неща, които по определение излизат вън от кръга на нашите идеи: създаваме образи, които ни се разкриват само колкото да знаем, че съществуват, и съществуването им остава единственото ни знание за тях. Историята започва поразително да наподобява Мойсеевата. На въпроса "как Му е името" Бог отговаря "Аз съм вечно Съществуващият" (*Изход*, 3:14) и открива само опаката страна на невидимия Си образ, колкото да повярваме, че я има и лицевата: "Ще те покрия с ръката Си, докле отмина; и кога Си сваля ръката, ти ще Ме видиш изотзад, а лицето Ми няма да бъде видимо" (33:22—23).

Да, камъкът, който не можем да повдигнем, е направен от самите нас. Сила ли е това, или слабост? – И двете. Слабост е, защото не можем всичко да изкажем, но е и сила, защото можем да изкажем безсилието си. Впрочем защо да парафразирам Паскал, вместо да го цитирам: "Човек е нищожен, понеже разбира нищожеството си, но е и велик, щом съзнава това."

18 Януари 1989 г.

Владимир СОТИРОВ

НЕОБХОДИМИТЕ ИСТИНИ ВЪВ ВЪЗМОЖНИТЕ СВЕТОВЕ

В предишната сказка разказах за трите главни теми, до които стигна науката логика в средата на третото хилядолетие от своя живот: *изчислимото*, *доказуемото* и *безкрайното*. Макар че слухът ни не е свикнал да чува заедно тия три толкова несвързани помежду си думи, именно логиката — а с нея те изглеждат още по-малко свързани — откри най-резултатния подход към тях, като с математическа точност показа какво можем да пресмятаме и какво не можем, кое ще успеем да докажем и кое е недоказуемо, коя безкрайност ни е подвластна и коя не е. Встрани от разказа ми остана темата за истината, традиционно приемана за изконна в логиката. Коя истина обаче? Та истината е лелеяна цел и за учения, и за съдията, и за ревнивия съпруг…

Всъщност всяка наука търси истината за нещо: биологията ни разкрива истината за живото, геологията — истината за земните недра, аритметиката — истината за числата, а геометрията — за фигурите. Тогава истината за какво търси науката логика? Нека не ни смущава, че отговорът звучи като афоризъм: неин предмет е истината за самата Истина. Задача на логиката е да опише странстванията на Истината по разните обиталища, където я приютяват и предрешват; нейна задача е още и да открие пътеките, по които една истина стига до друга, за да се роди от двете нова, трета истина. Най-странното е, че навсякъде по своя път Истината среща Лъжата, но веднага я разпознава, нарича я лъжа и по този чудотворен начин поражда пак истина — истината за Лъжата.

Впрочем не са чак толкова неизбродими тия пътеки и на малка разходка по тях вече ви разведох в миналата сказка, когато се помъчих да създам някаква представа за законите на логиката. Ако си спомняте, тогава ние заявихме, че законът е такова сложно твърдение, което е истина независимо дали са истина, или не твърденията, от които то е образувано. Сиреч *постулирахме*, че всяко твърдение е или истина, или лъжа. Какви ни бяха основанията? – Чисто схоластични: Magister dixit - Учителят Аристотел бе казал, че твърденията могат да са или верни, или неверни и никое твърдение не е едновременно вярно и невярно. Сега ще разгледаме по-отблизо тази догма, преди всичко за да си отговорим на въпроса, действително ли е догма тя или просто човекът така е създаден, че мисли само с “да” и “не”.

Можем ли да бъдем сигурни, че навсякъде из дебрите на мисълта ще срещаме само два образа – на Истината и Лъжата? Желанието ни да имаме тази сигурност е огромно, защото – поне у нас, рационално настроените европейци - още с подреждането на първите букви върху четалото е вселен духът, изпуснат нейде в Древна Елада: за него светът е слово, чийто свитък се развива постепенно и затова по-голямата част от съдържанието остава забулена в тайна, но с божествено прозрение и математически размисъл всеки наш въпрос един ден ще получи отговор “да” или “не”. Кое от двете е вписано и кога ще го прочетем – не знаем, но ни се ще трета графа в свитъка с отговори да няма. Ще се постарая в сегашната сказка да приведа някои доводи в полза на това наше желание, което за разлика от желанието да докажем недоказуемото, да сметнем неизчислимото и да обхванем необхватното май ще се окаже изпълнимо. Тогава ще излезе, че “синдромът на алтернативата” не е болест, а нормално състояние на здравата мисъл и всеки новопоявил се образ, различен от Истината и Лъжата, с подходящо словесно описание може да бъде идентифициран от нея като дегизирана Истина или Лъжа. Накратко изказана, моята теза е, че дори предразполагащите към трета логическа стойност твърдения допускат двузначна интерпретация.

Нека най-напред видим как стоят нещата с твърденията, които имат възможно най-простата структура - изреченията само с подлог и сказуемо плюс някое и друго допълнение или обстоятелствено пояснение. Обикновено тяхната функция е да съобщават факти: че нещо се е случило, че нещото е еди-какво си и т. н. По тази причина не би трябвало да очакваме от тях изненади: достатъчно е, образно казано, да погледнем през прозореца, за да установим тяхната вярност или невярност. Затова, да речем, само далтонизмът може да ни попречи да приемем за истина, че тревата е зелена, и за лъжа – че снегът също е зелен. Понякога проверката изисква голямо знание и умение, друг път отговорът е плод на конвенция, но вътрешно сме уверени, че всички питания от типа “Има ли живот на Марс”, “Доказуема ли е теоремата на Ферма”, “Съществува ли Бог”, “Безсмъртна ли е душата”, “Има ли край светът”, “Уилям Шекспир Френсис Бейкън ли е” и т. н., и т. н. носят отговора в себе си, този отговор е или “да”, или "не" и е само въпрос на време, за да стигне до нас. Прочее най-малкото тая увереност крепи и учения, и съдията, и ревнивия съпруг…

Но ето че някои логици - макар пò да им приляга името "заядливи софисти" – в продължение на векове се трудят да измислят въпроси, на които не подхожда нито "да", нито "не", защото каквото и да кажем, все е лошо. Интересно какво би отговорил на тях любезният организатор на нашите сказки:

- Кажи ми, мъдри Соломоне, вярно ли е, че си престанал да биеш баща си ?

Соломон Паси: Не е вярно! А също не съм си загубвал и рогата..

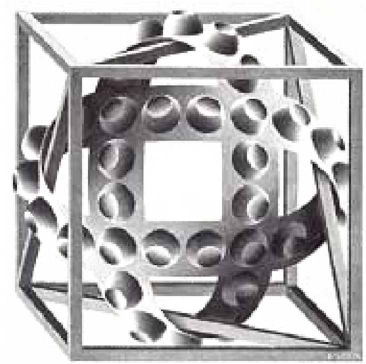
– Ще поговорим и за тях. Та, ако не е вярно, че си престанал, нима още го биеш, клетия? А ако си престанал (това би било чудесно!), кога за последен път го би?

– Ще се съгласиш, достолепни Соломоне, че притежаваш това, което още не си загубил, но тогава как стои въпросът с твоите рога, за които сам отвори дума? Ако не си ги загубил, значи са с теб, а ако си ги загубил, значи си ги имал?

– Отговори ми, всезнаещ Соломоне, плешив ли е сегашният крал на Франция? Да или не? И кръгъл ли е кръглият квадрат?- Изглежда, че да, защото сме го измислили кръгъл, но пък щом е квадрат…

– Изобщо, премъдри, истина ли е всичко онова, което говоря? А ако ти призная, че в момента лъжа, как ще погледнеш на мен – като на лъжец? Ами нали сам си признавам, че лъжа, значи ти казвам истината! Но тогава излиза, че не те лъжа, а уж твърдях обратното… Кое в крайна сметка е вярното? "Истина, истина ви казвам" – тия думи на Иисус Христос често излизат от нашата уста, без да забелязваме в тях нищо смущаващо, а ето че също толкова безобидната изповед "Аз лъжа" се превръща в непреодолим парадокс: тя едновременно е и вярна, и невярна. Представи си, Соломоне, следния казус: свидетел в съда се кълне, че говори лъжа и само лъжа. Как мислиш, трябва ли поради това показание да бъде съден за лъжесвидетелство? Та нали осъждането му би било признаване на неговата правдивост!

За щастие всички разгледани примери (с изключение на последния) след по-внимателен анализ се оказват шеговити логически задевки, породени от нашия навик, казвайки едно, да подразбираме друго, а да се досещаме за трето. По тая причина най-чистосърдечният – и логически най-правомерен – отговор на



въпроса "Знаете ли колко е часът?" – "Да, знам", звучи като подигравка. А глаголите "преставам", "започвам", "загубвам", "забравям" и т. н. по силата на своята семантика съдържат сигнал, че нещото, за което се говори, някога вече е било станало или обратно, че никога не е ставало, но това са все следствия, чиято истинност е отделен въпрос и не трябва да поставя под съмнение истинността на изходното твърдение: престанали ли сме, или не сме преставали, загубили ли сме нещото, или не сме го загубвали и т. н. Ако прочетем във вестника, че бирената фабрика е преустановила производството на компютри, информацията или ще е вярна (макар да налага извода, че фабриката е имала и странично производство), или ще е най-обикновена вестникарска лъжа и тогава нищо не налага извода, че досега тя ги е произвеждала (впрочем и самият вестник не би могъл да посочи дата, на която да е било спирано производството им). Неприятното в случая е, че опровержението на съобщението, т. е. "Бирената: фабрика *не е* преустановила производството на компютри", също би било невярно. Ситуацията напомня стария анекдот за оратора, който подхвърлил пред събранието, че половината от присъстващите са глупаци, но веднага си взел думите обратно, като заявил, че, напротив, половината не са глупаци. Очевидно трудностите идват от неясноти в механизма на отрицанието - невинаги успяваме да намерим мястото на частицата "не", за да изразим това, което искаме. Нека не ни смущава фактът, че понякога неверността на дадено твърдение ни натрапва верността на друго, а то за жалост ни звучи фалшиво – за нас в случая е важно, че пробата за истинност винаги дава едно от двете: или "да", или "не". Що се отнася до краля на Френската република, то и тук, ако се постави въпросът, вярно ли е сведението и трябва ли чуждото разузнаване да плати за него, решението може да бъде само отрицателно: сведението е невярно, понеже в картотеката на плешивите държавници не фигурира лице, описано като "сегашния крал на Франция". (Естествено на същите основания разузнаването би трябвало да отхвърли сметката и за сведението, че кралят има руси къдри.)

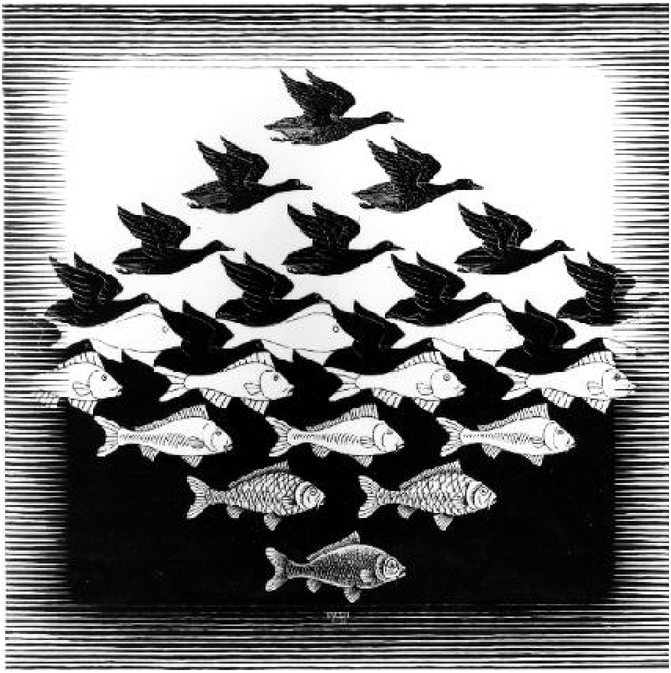
Следователно критерият за вярност, който малко на едро нахвърлях – изказването да отговаря на действителността, – е приложим към достатъчно широк клас твърдения. Разбира се, не е работа на логиката да установява фактическото състояние на нещата и оттук верността или неверността на конкретното твърдение (например има ли X рога) – за това вече говорих в миналата сказка. Причините, поради които едно изолирано твърдение е истина или лъжа, са дълбоко "лични", те се коренят само във взаимоотношенията между твърдението и действителността и затова в тях логиката не се бърка, но нейно задължение е да се съобразява с извода, че твърдението е или вярно, или невярно. Като изключение остана изречението "Аз лъжа". За него обаче трудно може да се приеме, че се отнася към някаква "външна действителност": в разгънат вид то изразява, че "това, което казвам в момента, е лъжа", а опитаме ли се да посочим с пръст, кое е "това", пръстът ни би се насочил към самия себе си. Изказването се визира само и затова действителността съвпада с него. Такива "самопозоваващи се" изречения има много и те играят важна роля в "експерименталната логика" (спомнете си за теоремата на Гьодел!), но все пак, трябва да признаем, остават встрани от реалната употреба на езика. А понеже ще бъдат специално разгледани в следващите сказки, тук спокойно мога да не се занимавам с тях.

Естествено твърденията, от които градим нашите разсъждения, обикновено не са изолирани заклинания, каквито бяха досегашните ни примери, а са свързани помежду си: едно е отрицание на друго или е следствие от него, две са взети заедно, трето приписва дадено свойство на всички обекти, докато четвърто се ограничава само с някои от тях и т. н. Съставното твърдение обаче не е в такова пряко отношение с действителността, както съставките, защото верността му се определя от характера на логическата връзка. Тук идва съвсем на място аналогия с химията: свойствата на химичните елементи са хрумване на природата и от гледище на химията са случайни, но когато няколко атома се свържат в молекула, свойствата на съединението зависят вече от вида на химическата връзка и изомерията е великолепен пример за това.

Законите на логиката имат привилегията да са винаги истина, но доказването им е чисто технически въпрос и не ми се ще да навлизам в него. Още по-малко ми се ще да излагам кодекс със закони. Така или иначе всички ние ги носим в себе си и криво-ляво си служим с тях, както и законите на езика са станали част от нас, и значенията на думите… Всеки може да заключи например, че ако винаги когато пътувам, чета, а хвана ли книга, заспивам, то винаги па път спя. Или че поговорката “Който учи, той ще сполучи” е логически еквивалентна на “Без наука няма сполука”. Или още, че ако сътрапезникът ни е скучен и когато говори, и когато мълчи, то той изобщо е скучен човек. От друга страна, пак законите на логиката ще ни убедят, че заключението “Щом X е с пари, а парите са хубаво нещо, то X е хубав” се крепи на житейски, а не на логически основания. И ако някой попита защо дадено разсъждение е законно, а друго не е, отговорът може да бъде само един: защото такива са правилата, които управляват верността на логическите връзки “и”, “или”, “ако… , то…”, “не”, “за всеки”, “за някои” и т. н. Механизмът на тия правила – в него именно не искам да задълбавам – определя при кои съчетания от истини и лъжи съответната логическа връзка дава истина и при кои – лъжа. Да речем, отрицанието “не” превръща истината в лъжа и обратно; следването “ако… , то…” дава истина, когато и условието, и следствието са лъжи, но дава лъжа, когато условието е истина, а пък следствието – лъжа (лъжата влече след себе си лъжа, но никога от истината не следва лъжа!). Щом обаче верността на елементарните твърдения няма отношение към логиката, в нейния периметър остават само правилата, по които определяме верността на съставните твърдения, а точно те не се поддават на директна емпирична проверка. Тогава с основание можем да попитаме: защо правилата са именно такива, а не инакви?

Днес, когато пиша тези редове, е вторник. Утре значи е сряда. Впрочем не – вече е станало сряда. Факт… А когато фактите говорят, знае се, боговете мълчат. И тогава взимат думата логиците.

Докато потопя перото в мастилницата, днес престана да е вторник, а утре няма да е сряда. Ето че едновременно две мои твърдения се оказаха неверни, защото не отговарят на действителността. И все пак твърдението “Ако днес е вторник, утре е сряда” остава вярно – та то е вярно дори в неделя! Можем ли обаче да го сверим с действителността? Как да направим днес отново да е вторник? А всички сме уверени във верността му, без да чакаме до следващия вторник. Казаното потвърждава нашия постулат, че когато от една лъжа следва друга, резултатът е истина. Питам се кое поражда тази истина. Разбрахме, че във всеки случай не пряката проверка. Колко често нашето “ако” изразява именно че думите след него нямат нищо общо с действителността – ненапразно французите са убедени, че с “ако” Париж се побира в шише. Ежедневието постоянно ни сервира подобни истини. “Ако бях взел такси”, случва се да чуем, “нямаше да закъснея”. Погледнем ли “през прозореца” съгласно нашия критерий за истинност, ще видим само, че таксито го няма, а закъснението е налице, но никъде навън няма да видим “ако… , то…”. Онзи, който прочувствено мълви “Ако не те бях срещнал, животът ми щеше да бъде рай”, знае, че хипотезата му е емпирично недоказуема поради необратимостта на времето, и дори когато бодро започва живота си отначало, той вижда, че новото начало не съвпада с онова, първото, уви… Излиза, че физическите основи на истинността са заменени от чисто логически, а какви са те и откъде идват?



Въпросите ни допълнително се заострят на фона на моята основна теза и добиват, може да се каже, съдбовно значение. Истината и лъжата, логическите връзки, законите – това е в крайна сметка нашата логика. Допуснем ли, че имат право на съществуване и други логически стойности например, че твърденията освен верни и неверни могат да са още и неопределени, безсмислени, възможно верни, случайно верни, понякога верни или, обратно, необходимо верни, винаги верни и др., веднага ще се промени кодексът от закони: или някои от тях вече няма да са винаги истина (при новите стойности), или ще се появят нови закони, обхващащи новите логически връзки. Решим ли пък да ревизираме кодекса, щом по едни или други причини някои логически закони не намираме за приемливи, ще се наложат промени в статута на истината и лъжата – без тези промени ще продължат да бъдат винаги верни и отхвърлените схеми. Накратко Аристотеловата логика (или класическата, или двузначната, както още се нарича) е съвсем завършено и постоянно цяло: въведем ли допълнителни стойности освен истината и лъжата, ще получим други закони; изменим ли законите, истина и лъжата вече няма да са достатъчни (поне в своя изначален, абсолютен смисъл). С една дума, логиката ще се промени. Следващите минути ще бъдат посветени именно на такива нетрадиционни, наречени още некласически логики – израз на недоволство от класическата логика. Дори ще се опитам да покажа как те могат да се тълкуват в рамките на класическата логика. Това би означавало, че Истината и Лъжата всъщност са достатъчни, но евентуално с някои уточняващи подробности (истина "къде", истина "кога", истина "за кого" и т. н. – релативизация на истината, към която комай сме привикнали).

Уж недоволстваме от класическата логика, а продължаваме да плуваме в нея. Най-странното е, че всички спорове около предимствата и недостатъците на разните логики се водят на една обща база и тя е нашата, "човешка" логика, с която сме закърмени. Защо именно тя? Защо с нея започва и с нея завършва съзнанието? Кой я е посадил в него и кога? Човек не може да избира геометрията на света, в който живее, нито пък произволно да променя физическите закони, но законите на логиката са негово собствено творение, а щом са възможни и други логики, защо човечеството се е спряло именно на тази? Свободни ли сме да избираме логиката си и ако не сме, от какви върховни съображения е наложена точно тя?

Соломон Паси: Може би в процеса на еволюцията естественият отбор е отсял всички човешки родове, които са имали друга логика, и е останал само родът Homo sapiens с нашата логика…

- Интересна идея… и абсолютно непроверима. Може би класическата логика има това предимство пред останалите възможни, че в някакъв смисъл е единствената адекватна на "обективната действителност", но като имаме предвид, че въпросната адекватност с нищо не може да бъде установена – дали дадена логическа схема в безброя от частни случаи дава резултат, отговарящ на действителността, – аз се отказвам да коментирам този въпрос. Впрочем добра или лоша, това ни е логиката! Да вървим нататък и да видим как изглежда тя от "птичи поглед" – тогава може би ще открием поводи за недоволство от нея,

Най-напред, както бе казал Лайбниц по друг повод: "Да сметнем!" С колко логически връзки разполага класическата логика? Във всяка връзка участват две твърдения, които поотделно могат да бъдат както истина, така и лъжа. Затова комбинациите между тях са

4, а понеже съставното твърдение, определено от връзката, за всяка комбинация на съставките може веднъж да е истина, втори път да е лъжа, с броене на пръсти се убеждаваме, че възможните логически връзки на две твърдения са 16. Ако се вгледаме в пълната им "ведомост", ще видим, че това никак не е много: в комбинациите ще трябва да се вместят познатите ни "и", "или", "ако… , то…" и още някои, но освен необходимите ще забележим и съвсем безинтересни комбинации без реално покритие – ще намерим например една, която винаги е истина независимо от истинността на съставките, и друга, която винаги е лъжа, А повече възможности за образуване на логически връзки нямаме – връзки, на които отговарят еднакви комбинации от истини и лъжи, колкото и да се мъчим да внесем нюанси в тях, ще са логически неразличими.

Действително недостигът от логически връзки се усеща веднага: ако вземем, да речем, комбинацията, която отговаря на "и", ще видим, че тя е симетрична, т. е." А и В" е еквивалентно на "В и А". В естествения език обаче не е така – "Тя се ожени и забременя" все пак е по-различно от "Тя забременя и се ожени". За жалост в нашата ведомост няма място за усъвършенствано "и" – ако изберем друга комбинация, която да не е симетрична, с разочарование ще открием, че тя е по-близка до някоя логическа връзка, нямаща нищо общо с реалното "и". По тази причина класическата логика не може да различи "Отиде и се върна" от "Отиде, а се върна", от "Отиде, но се върна" и т. н.

Димитър Вакарелов: Да, "Той се застреля и умря" е различно по смисъл от "Той умря и се застреля", но това само показва, че нашето "и" в действителност е съкращение на по-сложен израз: "Той се застреля и *после* умря".

– Точно така, но именно за подобни по-сложни връзки няма място в 16-колонната ведомост. А да не забравяме, че трябва да настаняваме и желаните от нас "възможно вярно", "необходимо вярно" и т. н. Затова да помислим налага ли се изобщо да въвеждаме различни категории на вярност - "висши" и "нисши", или разслояването на истината е излишно. Нали уж "истината е една" – или я има, или я няма. Нима може едно твърдение да отговаря на фактите, но "недотам", а друго да им отговаря "повече" (впрочем май и към това сме привикнали)!

Често в ежедневната ни реч израз на максимална убеденост е обещанието "да си отрежем главата". Чуваме например: "Ако тя ти се обади, аз ще си отрежа главата." Преувеличението е налице, но именно то прави следването логически изрядно, защото подчертава, че заключението е пълен абсурд, а според смисъла на фразата колкото заключението е вярно, толкова и условието, т. е. хич. Тогава цялата конструкция дава истина по тривиални причини – както вече казах, следване, в което лъжа влече лъжа, е вярно. Да разгледаме още един пример: "Ако се бях родил момиче, щях да се казвам Мария." Добре известно е, че нито съм момиче, нито се казвам Мария, и затова следването отново е вярно по тривиални причини. Все пак в него усещаме нещо повече, особено ако го сравним с някое близко до него твърдение, чиито основания за вярност са само тривиалните, например със: "Ако се бях родил момиче, щях да си отрежа главата." Работата е там, че между пола на новороденото и неговото име съзираме причинно-следствена връзка (прието е внуците да се кръщават на бабите и дядовците, а едната ми баба се казва Мария) и тази връзка очевидно е по-силна от голата констатация: "Колкото това е истина, толкова и онова." Макар че двете твърдения имат еднаква форма – "Ако... , то...", а и двете са верни по формални причини, в първото забелязваме елемент на неизбежност, който не е изказан явно, но се подразбира. В пълния си вид едното твърдение би звучало "Ако се бях родил момиче, *задължително* щях да се казвам Мария", докато за другото можем да добавим най-много това, че съвсем не е задължително човек да се самоубива само защото се е родил момиче. Първото "ако" се различава от второто със скритата в себе си необходимост. Всеки знае, че в случая тя е породена от традицията, но нас ни интересува логическата ѝ природа. Затова да се вгледаме по-внимателно в семейния пример: макар на преден план да изпъкват моята скромна личност и името "Мария", които за Историята са смешна случайност, в дълбочина прозира далеч по-общото твърдение "Ако се роди момиче, то *винаги* се кръщава на баба си" или в друга форма: "Във *всяко семейство* момичето носи името на баба си" (разбира се, "винаги" и "във всяко семейство" са употребени в техния житейски смисъл на "обикновено" и "в типичното семейство").

Ето че получихме първите доводи в полза на съществуването на необходими истини наред с "простите". Да обобщим нашия извод и да запомним ключовите понятия – те ще ни потрябват.

Видяхме, че понякога "А влече В" е истина не поради друго, а защото А е лъжа, и тогава от него следва каквото и да било (такива тривиално верни изводи Маркс иронизира с въпроса "Какви биха били децата на султана, ако султанът беше евнух"). В много случаи обаче сме склонни да приемем "А влече В" за *необходимо вярно*, а това, преведено на логически език, означава, че вече не разглеждаме А и В като абсолютно верни или неверни, каквито са те в действителността, а като зависещи от обстоятелствата. Реално се е случило А (или, напротив, не се е случило), но ние все пак (макар със задна дата) допускаме възможността то да не се случи (или съответно да се случи). Разбира се, това означава от своя страна и обстоятелствата, които реално са се стекли, да са могли да протекат по различен начин, но така само преместваме "флуида" на необходимостта, а не го премахваме. При всички конкретни обстоятелства А и В поотделно могат да са както истини, така и лъжи, но ние с твърдението си изразяваме, че *винаги* когато А е вярно, вярно е и В. С други думи, не може в едни и същи обстоятелства да се случи А, а да не се случи В (в различни обстоятелства може, но не и в еднакви). В моя пример още с изричането на "ако" мисълта ми "мултиплицира" собственото ми Аз и го помества в различни обстоятелства, влияещи върху пола и името: различни семейства, различни моменти на зачеването, различни положения на светилата и какво ли още не. Не допуснем ли вариантност в обстоятелствата, а следователно и резултат, различен от този, който сега има честта да беседва с вас, става безпредметен целият въпрос. Ако приемем, че никаква друга възможност не е съществувала освен реализиралата се (за щастие или нещастие), тогава нашето "ако" автоматично се, превръща в онова, другото, с което султанът е евнух, а Париж вече е в шишето.

Много добре зная, че от такива разходки из "градината с разклоняващите се пътеки" на отминалите и прииждащите възможности човек може да се побърка, защото не знае къде да спре във фантазиите си. Ние непрекъснато се поставяме на чуждо място, представяме си как бихме били други, ако нещо трето беше станало иначе, и изведнъж се сепваме от въпроса: Всъщност, ако бяхме други, в какъв смисъл ще сме ние самите?

Тъмни въпроси с още по-тъмни отговори, но за радост главната ни цел започва да се прояснява. Допускайки съществуването на цяла гама от обстоятелства наред с реално осъществените, ние приемаме, че ходът на историята непрекъснато прави избор между първоначално равноправни възможности: от всички тях се осъществява една, а останалите се отхвърлят. Защо, как и по какъв критерий се избира тази единствена възможност, не ни е съдено да узнаем, но с нашето "ако беше... , щеше..." ние се връщаме в момента преди избора и допускаме, че той е можел да бъде всякой друг. Това означава, че светът във всеки момент се плъзва само по една от възможностите си, което пък сочи, че нашият реален свят (може би е по-добре да кажем "реализиралият се свят") – този, в който едновременно сме и актьори, и зрители, е само един от възможните светове. Онова, което е вярно не само в него, а и във всички алтернативни, е неизбежно, защото накъдето и да бе тръгнало развитието, то все щеше да е вярно. В този смисъл то е необходимо вярно. Сега се разкрива и тайната в заглавието на моята сказка: *необходими истини са истините във всички възможни светове*.

Терминът "възможен свят" е дан на уважение към Готфрид Вилхелм Лайбниц – мислителя, който го въведе, за да обясни непрекъснатия преход от възможност към действителност, извършван по силата на оная върховна необходимост, която чрез безкрайния низ от случайности ни приближава към крайния замисъл на Твореца – съвършенството. След като в продължение на три века идеята за възможните светове бе достояние само на философи и теолози, неочаквано в наши дни благодарение на Рудолф Карнап и Сол Крипке тя изгря на математическия небосклон, за да даде математически смисъл на некласическите логики. Тогава Истината и Лъжата, с които бе свикнала класическата логика, загубиха абсолютните си качества и се оказаха привързани към нашия, "актуалния" свят – тук и сега. В рояка възможни светове обаче нашата истина може някъде да е пак истина, а другаде да е лъжа, както и нашата лъжа е разпределена по произволен начин на картата на възможните светове. Ако се случи тукашната истина да е истина и във всички възможни светове, тя се издига в ранг на *необходима истина*, но ако не е вярна навсякъде,

тогава е само *случайна истина*. Лъжата пък, ако в някой възможен свят е истина, се превръща във *възможна истина*. Сега можем да допълним мотива от заглавието: *възможни истини в нашия свят са истините в някой възможен свят*.

Естествено за математика термините са без значение и вместо "възможни светове", в които да е вярно твърдението А, можем да говорим за "възможни теории", които включват А, а можем и да запазим "обстоятелствата", с които започнахме, или да ги заменим със "случаи" и т. н. Важното е, че необходимостта – кога явно, кога скрито – участва в нашите твърдения, допуска тълкуване като "вярност навсякъде" и това тълкуване се съгласува с интуицията. Възможността пък се тълкува като "вярност някъде", което също отговаря на интуицията. Все пак, за да проверим и модела, и интуицията си, нека огледаме още веднъж старите примери и да се спрем на няколко нови. Твърдението "Ако бях взел такси, нямаше да закъснея" се оказва необходимо вярно, защото с целия си подтекст изразява убеждението, че "*Всеки*, който вземе такси, идва навреме" (или поне всеки, който в дадения час на деня тръгва от този квартал към онзи). Твърдението "Ако днес е вторник, утре е сряда" не само е необходимо вярно, но и чудесно илюстрира как неистините в нашия свят могат да бъдат истини във възможните светове и оттам да породят истина в нашия. На днешния ден – неделя – твърденията "Днес е вторник" и "Утре е сряда" са неверни. Има обаче безброй дати, които са вторници, има и безброй, които са среди, по *всеки* вторник е следван от сряда и това показва, че твърдението ни е необходимо вярно. Както вече видяхме, "Ако се бях родил момиче, щях да се казвам Мария" е необходимо вярно въз основа на наблюдението, че във *всяко семейство*, в което бабата е Мария и се е родило момиче, името му е също Мария. И твърдението "Казвам се Владимир" е необходимо вярно, понеже е вярно твърдението "Във всяко семейство, в което дядото е Владимир, внукът също е Владимир". Обаче самият факт, че съм се родил момче, е случаен, защото *има* семейства, в които се раждат и момичета. Друг пример: историята свидетелства, че Сократ е бил женен за злата Ксантипа, и това е истина, но не необходима, понеже, щом не всеки мъж е бил длъжен да се свърже именно с Ксантипа, можем.да си представим по-различно развитие на нещата - "възможен свят", в който Сократ да е женен не за Ксантипа, а за друга (евентуално също толкова зла жена). Обърнете внимание, че необходимо верните твърдения отново допускат усилване с думи от типа на "непременно", "неизбежно" и т. н., докато "простите" истини не се връзват с тях: "Ако днес е вторник, утре *непременно* е сряда", "Ако бях взел такси, *непременно* щях да дойда навреме", но "Сократ непременно е бил женен за злата Ксантипа" звучи озадачаващо. По-нататък: само заклет питагореец би дръзнал да твърди, че броят на планетите заедно със Слънцето – точно 10 – е плод на някаква космическа или божествена необходимост, но съвсем не е случаен фактът, че планетите се движат по конични сечения, защото така ще се движат те около всяко светило под действие на централна сила (дори да не са 9). Шестте числа, които се падат на Тото-2, са образец за случайност, но твърдението, че винаги неизтеглените числа са 43, е необходимо вярно. Такива са и твърденията, че с линийка и пергел може да се построи правилен петоъгълник, а правилен седмоъгълник не може, защото в какъвто и свят да си занесем линийката и пергела, правилни петоъгълници ще можем да чертаем, а правилни седмоъгълници – не.

Няма що – и сказчикът, и неговата почитаема аудитория вече усещат, че морето от факти не е до колене. Сега обаче знаем много повече за тях, отколкото в началото на сказката. Тогава допуснахме, че фактите или са налице, или не са, и твърденията за тях са съответно истина и лъжа. След като стигнахме до извода, че някои факти са могли и да не се случат за разлика от други, конто неизбежно биха се случили, това веднага разслои истините, като обособи необходимите и възможните истини. Така допълнителното допускане, че светът непрекъснато се люшка от избор към избор, рефлектира върху нашата логика, като вътре в класа на верните твърдения разграничава тези, които са верни само при някой избор, от онези, които са верни при всеки. Ние не знаем нищо за начина, по който светът преминава от една възможност към друга, но знаем какво означават думите "всеки" и "някой". След малко ще оценим важността на това наблюдение.

Има една категория твърдения, която заема особено място в историята на логиката, защото така, както е затруднила Аристотел, затруднява и нас. Става дума за изказванията за бъдещето. Какъв е техният "логически статус"? Твърдението "Утре ще има морско сражение" вярно ли е днес? – пита Аристотел. Морското сражение сигурно отдавна е приключило, а въпросът е останал… Естествено утре ще разберем дали твърдението е истина, а ако се окаже, че е така, истина ли е било то *днес*? Помислете: ако твърденията за бъдещи събития "към днешна дата" вече са верни или неверни, това би означавало, че утрешната действителност съществува в напълно завършен вид още от днес и дори от вчера! Защо тогава чака да стане утре? И трябва ли да плащаме на Сибила, за да ни я предсказва, щом не ѝ се налага да прозира в бъдещето, а само да наблюдава умело скритото "сега"? С други думи, планирано ли е бъдещето вече? Зрее ли то в настоящето както дете в майчината утроба, или само се е потулило – вече съзряло – и чака да изскочи? Ако сме реалисти, трябва да признаем, че на нито един от тия въпроси нямаме отговор, но за утешение бихме могли да заменим висящото във въздуха "Утре ще има морско сражение" с *две* твърдения, при това и двете верни: "Утре *може да има* морско сражение" и "Утре *може да няма* морско сражение". Стига да допуснем, че бъдещето не е докрай определено днес, никоя от двете възможности – да има и да няма морско сражение – не ще е още елиминирана и по тази причина ще съществува както пътека, водеща към сражението, така и пътека, минаваща встрани от него, а точно това означава да са верни заедно "Възможно е да има" и "Възможно е да няма".

Все пак да не се предаваме, без поне да пофилософстваме. "Утрешното е само възможно", казваме ние и имаме предвид, че няма никаква еднозначност в портрета на бъдещето, а тъкмо напротив – контурите му продължават да се очертават до последния момент. Казваме… и сами не разбираме какво казваме: дали че щрихите постепенно се наслагват и разкриват все по-релефно бъдещето, а портретът му отдавна съществува в ескиз, но трябва време, за да се пренесе върху картона; или че самият образ се дооформя всеки миг, всички линии се определят в момента на нанасянето им и затова колкото и да се мъчим да узнаем подробностите, не ще успеем – та те още не съществуват. Накратко, ние ли не знаем какво ще последва, или самата природа и тя не знае? В първия случай всички резултати от тиражите на Тото-2 ще са изтеглени за сто години напред, но ще стоят заключени в чекмеджето на началника на Спортния тотализатор, който ще ни показва всяка седмица по един фиш, а във втория случай фишовете пред началника ще са празни и за да ги попълни, ще трябва да върти сферата с топките.

Първият вариант на поведение на природата, известен под името "детерминизъм", най-ярко е описан през 1814 г. от маркиз Пиер-Симон дьо Лаплас в неговото прочуто *Философско есе за вероятностите* – един от редките случаи на поезия в науката: "Трябва да гледаме на сегашното състояние на Вселената като на следствие от предишното ѝ състояние и причина за следващото ѝ състояние. Ум, който в даден момент познава всички сили, оживяващи природата, и взаимното положение на всички тела, които я образуват, ако освен това той е достатъчно широк, че да анализира тези данни, ще обгърне с една формула движенията и на най-големите тела във Вселената, и на най-леките атоми: нищо няма да е недостоверно за него и бъдещето заедно с миналото ще е пред очите му. Човешкото съзнание със съвършенството, което даде на астрономията, ни представя една слаба скица на този ум. Неговите открития в механиката и геометрията заедно с откриването на всемирното привличане го направиха способно да обхваща с едни и същи изрази миналите и бъдещите състояния на световната система. С прилагането на този метод към някои други обекти на познанието то успя да подчини на общи закони наблюдаваните явления и да предвиди явленията, които дадените обстоятелства ще породят. Всички тези усилия на човешкото съзнание в търсене на истината непрекъснато се стремят да го доближат до ума, за който току-що споменахме, но от който то винаги ще остава безкрайно далече. Този стремеж е присъщ на човешкия род и точно той го извисява над животните, а успехите му в тази насока различават нациите и вековете и носят тяхната истинска слава."

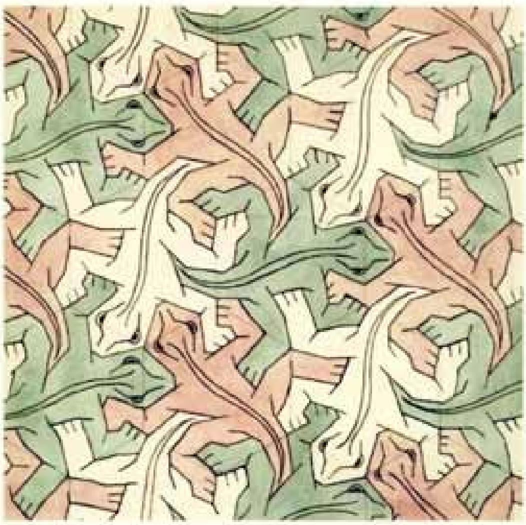
Както става ясно, при такова поведение от страна на природата вината за непознаване на бъдещето би била само наша, защото не биха съществували случайности, които да го правят неопределено.

Ние сме свикнали с мисълта, че бъдещето е само вероятно и можем да му влияем, докато миналото е определено веднъж завинаги и не търпи никаква намеса post factum. Затова възможността да променим бъдещето е реална, докато промяната в миналото е само пропусната възможност: *ако все още може* утре да няма морско сражение, то Наполеон *вече не може* да победи при Ватерло, но *можеше* да победи, ако не беше хремосал… Тук единствената разлика между "може" и "можеше" е от физическо естество – първото се отнася за 13 септември 1989 г. ("днес"), а второто – за 17 юни 1815 г. (навечерието на битката при Ватерло). От логическо гледище те са равносилни, понеже и двете изразяват, че от някаква точка във времето излизат различни пътища на развитие. При "може" някои от тях водят към морското сражение, а останалите са "мирни"; при "можеше" едни пътища водят към поражението на Наполеон, другите са победни за него*. И понеже, повтарям, едната дата е отминала, а другата не е, ние *все още можем*

* Сега се убеждаваме, че народът е имал предвид семантиката на възможните светове, създавайки поговорката "Когато се обърне каруцата – пътища много".

да променим нещо, докато Наполеон вече *не може* да направи нищо (но е *можел* – тогава).

В детерминистичния модел на природата, за който говори маркиз дьо Лаплас, тази асиметрия между минало и бъдеще изчезва. Само че докато в предишните разсъждения Наполеон не можеше да въздейства на събитията, защото е пропуснал момента, сега ние не можем да влияем върху историята по съвсем други, отчасти логически причини: поради еднозначната зависимост на всяко следващо състояние



от предходното пътят на развитие е един-единствен, а в такъв случай реши ли Историята утре да има морско сражение, тогава сражение *не може да няма*. Детерминизмът обаче влошава положението и на Наполеон: той не само *сега не би могъл* да промени нещо, но още тогава, на 17 юни *е нямало да може*. При всяко връщане на лентата хрониката на събитията би била все същата – познатата ни, и при никое "доглеждане" камериерът на Наполеон не ще успее да го наметне навреме, за да промени хода на историята…

Вторият възможен вариант на поведение на природата недетерминистичният, отведнъж сервира на днешния свят безброй алтернативи, и то във всеки момент различни (плурализъм!), а на нас ни доставя безброй нови вълнения. Нима можем без трепет да си представим как този наш свят във всеки миг е единственият избран, а и е единствен само за миг? Това е мигът, в който той се промушва през цедката на времето и отзад са останали отхвърлени безброй не по-малко възможни светове, а отпред го чакат нови безброй светове и един от тях ще бъде той самият. Какви са били отхвърлените – можем само да гадаем, защото никой не ги е видял освен Онзи, Който с властта Си ги унищожава, още неродени. Остава ни да обърнем взор към бъдното с надеждата, че в новите безброй възможности ще съзрем оная, която Той вече е посочил с пръст…

Може би присъстващият тук архимандрит Горазд ще ми помогне:

– Кажете, отче, как Бог прави Своя избор? Ако използвам великолепната метафора, хвърля ли Той зарове, или изборът Му е фиксиран в предварителен план? Къде е нашето място в тази безкрайна игра – правим ли и ние своя избор, когато се лутаме наляво-надясно? Какво ще излезе, че и аз, дори само като говоря в момента, и ти, любезни слушателю, като ме слушаш, а и като не ме слушаш също – всички ние участваме в избора на бъдещето наравно с Господа? Нима, отче, сме Негови съавтори в творбата Му? Ако пък всичко е предопределено и действаме по чужда воля, ако нашата собствена е чиста фикция, а действията ни са вписани в нечие разписание, тогава къде остава личната ни отговорност за постъпките? Ами ако аз убия, значи съм бил упълномощен – убийството е трябвало да бъде извършено по предварително оформен висш замисъл и аз ще съм само един нещастник, комуто се е паднала участта да стане негов изпълнител. Какъв абсурд, отче, та тогава ще трябва не да ме съдите, а да ме наградите за това, че съм спасил всички вас, поемайки върху себе си мерзката съдба!

Архимандрит Горазд: Бог ви е предоставил правото сам да решавате кое е добро и кое е зло.

– Да, но ето как доброто и злото, макар да са категории на морала, поставят въпроси, отново свързани с битието: откъде да знам дали когато върша моето малко добро, не подготвям почвата някой да извърши своето голямо зло? А този "някой" може да бъде и самата природа със своите катаклизми. Как да реша дали едно дребно зло, извършено навреме, няма да освободи пружините, които ще тласнат човечеството към всеобщото добруване? А ако не стигне дребното зло, може би ще е достатъчно малко по-голямо? А ако е необходимо – и още по-голямо, нали е все за всеобщото добруване! Съществува ли тогава, отче, разумно насилие и има ли то граници, отделящи го от всеопрощаващата целесъобразност, която така лесно прелива в произвол?

Терзания, терзания… и от етично, и от гносеологично, и от онтологично естество, но всичките предизвикани от едно главно терзание: детерминиран ли е светът и какво е мястото на моята воля в него. На този хилядолетен въпрос са се мъчили да отговорят и философи, и теолози, и физици, всеки на своя език, но засега безрезултатно. Що се отнася до логиката, тук трябва да повторя декларацията, че фактите не са нейна тема: речникът ѝ не включва нито "действителността, съдържаща се във възможност", нито "предустановената хармония", нито статистиката на радиоактивния разпад. Затова тя не може да разкрие механизма на случайността и необходимостта в явленията, ако той изобщо съществува, но на езика, с който разполага, може да установи – и с това ще изпълня обещанието си, дадено преди малко, – че в *словото* си човечеството се изявява така, сякаш светът е недетерминиран. Подобно на Молиеровия Журден, който не подозирал, че говори в проза, и ние, без да се замисляме, използваме граматични категории, породени от недвусмислен архетип: отричане на детерминизма. Още самата употреба на думите "може", "неизбежно" и "случайно" разчита на представата за сноп от възможности, а смисълът, който влагаме, еднозначно ги свързва с изрази като "в някои мислими случаи", "във всички, мислими случаи" и "обратният случай също е мислим". Ако опишем математически новите операции, "модалните", и съответно правилата им за вярност в "мислимите случаи" (или във "възможните светове"), ще получим формална система, която в номенклатурата на модалните логики носи кодовото название S5. Класическата логика също може да се разглежда в термините на "възможните светове", но тогава просто ще се окаже, че "възможният свят" е само един, реалният. Затова всяко твърдение или е истина в този единствен свят, или е лъжа в него, а щом няма "онзи свят", уточнението за света е излишно. Така истината и лъжата добиват абсолютния смисъл, с който сме свикнали. Самите модалности пък стават фиктивни –"необходимо вярно" и "възможно вярно" е същото, каквото и "вярно", а "случайно вярно" няма.

Логично е да се очаква, че щом има S5, ще има и S4, и S3… Това вече подсказва темата на Димитър Вакарелов, от когото очаквам да разкаже по-подробно как разните некласически логики се интерпретират в "природната" логика – класическата. Тогава ще получи по-солидни доказателства моята теза, че в мисленето си човек не се отклонява от практиката да преценява истината и лъжата в зависимост от обстоятелствата, т. е. че "третите" логически стойности имат живот, но само като по-подробни описания на природно заложените две, а, от друга страна, класическата логика ще излезе само максимално опростена, черно-бяла схема, която интегрира обстоятелствата в една обща картина и по този начин ги игнорира.

Нека в заключение оценим по достойнство нашия извод, че човешкото мислене е подчинено на логиката S5, а тя е подчинена на представата за недетерминиран свят. Дано наистина е така, защото ако господстваше детерминизмът, всички вие щяхте да се лишите от моята сказка – тя би била безпредметна, понеже нямаше да ги има нито, необходимите истини, нито възможните светове. Твърде мрачна перспектива, допълнително проникната от тайнството на парадоксалността: ако природата е детерминирана, в числото на "най-леките атоми" биха попаднали и мастилените следи, които в момента перото ми оставя върху хартията. Но тогава ще излезе, че единствената нишка на Историята – защото други няма – минава през моята сказка, сякаш цялото световно развитие е било насочено към една цел: да ме застави съвсем детерминирано да напиша, че детерминизъм не съществува! Доста странно би било, ако е така… Ако пък природата е недетерминирана, най-вероятно тия ми откровения щяха да се окажат извън руслото на Историята или да станат достояние на друг, което и в двата случая би било печално…

Щастлив ще съм, ако съм успял да ви разкажа как едва в наши дни математическата логика успя да реши вековечния въпрос за единствеността на Истината и Лъжата, като същевременно изпълни завета на Спасителя, предаден ни от евангелиста Матей (5:37): "Думата ви да бъде: да, да; не, не; а каквото е повече от това, то е от лукавия."

15 септември 1989 г.

На Виктория Окампо

Хорхе Луис БОРХЕС

ГРАДИНАТА С РАЗКЛОНЯВАЩИТЕ СЕ ПЪТЕКИ*

На страница 242 от "История на Европейската война" от Лидъл Харт[1] четем, че било предвидено тринадесет британски дивизии (подкрепени от хиляда и четиристотин артилерийски оръдия) да атакуват на двадесет и четвърти юли 1916 година участъка Сер-Монтобан, но се наложило нападението да бъде отсрочено за сутринта на двадесет и девети същия месец. Поройните дъждове (отбелязва капитан Лидъл Харт) били причина за това всъщност незначително отлагане. Следното изявление, продиктувано, проверено и подписано от доктор Ю Дзун, бивш професор по английски език в Hochschule** в Циндао, хвърля неподозирана светлина върху този случай. Липсват първите две страници. "…и окачих слушалката. Веднага след това се сетих чий е гласът, който бе отговорил на немски. Беше на капитан Ричард Мадън. Мадън в апартамента на Виктор Рунеберг – това означаваше край на нашите стремежи; и колкото и да изглеждаше второстепенно, или *поне така трябваше да ми се струва* – край на нашия живот. Това означаваше, че Рунеберг е арестуван или убит.*** Същия този ден, още преди да залезе слънцето, аз щях да последвам съдбата му. Мадън беше неумолим. По-скоро принуден да е неумолим. Ирландец на английска служба, човек, обвиняван в безразличие и може би в предателство, нима можеше да не използва този прекрасен случай и да не бъде благодарен на съдбата,

* Препечатва се от БОРХЕС, Х. Л. 1989. *Вавилонската библиотека.* София: Народна култура. – Б. съст.

** Висше училище (нем.) – Б. пр.

*** Отблъскващо и странно предположение. Всъщност прусашкият шпионин Ханс Рабенер, известен като Виктор Рунеберг, заплашил с пистолет приносителя на заповедта за арест капитан Ричард Мадън, който при самозащита му нанесъл рани, причинили смъртта му (бележка на издателя) – Б. а.

че му се удава възможност да открие, плени и може би да убие двама агенти на германската империя! Качих се в стаята си; безсмислено заключих вратата и се хвърлих по гръб върху тясното желязно легло. От прозореца се виждаха все същите керемидени покриви и заоблаченото слънце, типично за шест часа следобед. Стори ми се невъзможно този ден да се превърне – без предзнаменования и символи – в ден на неумолимата ми смърт. Значи – въпреки мъртвия ми баща, въпреки че бях израснал в една симетрична градина в Хай Фън – аз щях да умра сега? След това си помислих, че всъщност всички неща се случват сега, точно сега. Минават век след век, а нещата се случват единствено в настоящето; има безброй хора във въздуха, на земята и в морето, но всичко, което наистина става, става именно с мен… Почти непоносимият спомен за конското лице на Мадън прекъсна тези мисли. Сред омразата и ужаса, които изпитвам (сега вече мога да говоря за ужас, сега, когато надиграх Ричард Мадън, сега, когато шията ми вече очаква с нетърпение примката), помислих си, че този буен и несъмнено щастлив воин не подозираше, че зная Тайната – името на мястото, където се намира новият британски артилерийски парк при Анкър. Една птица се стрелна в сивото небе; въображението ми я превърна и самолет, а този самолет – и много други (във френското небе), които унищожаваха артилерийския парк с отвесно падащи бомби. Ех, ако устата ми, преди да я разкъса куршумът, можеше да изкрещи това име така, че да се чуе в Германия!… Но човешкият ми глас беше много слаб. Как да направя така, че името да стигне до ушите на Шефа? До ушите на онзи болен и отвратителен човек, който знаеше единствено това, че Рунеберг и аз се намираме в Стафордшир, и напразно чакаше новини от нас в голия си кабинет в Берлин, преглеждайки непрестанно вестниците... Произнесох гласно: *Трябва да бягам*. Изправих се безшумно, като безсмислено пазех тишина, сякаш Мадън вече ме дебнеше. Нещо – може би ненужното желание да констатирам, че нямам никакви средства – ме накара да пребъркам джобовете си. Намерих онова, което очаквах: американския часовник, никеловата верижка и четириъгълната монета, ключодържателя с безполезните и компрометиращи ме ключове от апартамента на Рунеберг, бележника и едно писмо, което реших незабавно да унищожа (и което не унищожих), фалшивия паспорт, една крона*, два шилинга и няколко пенита, червено-синия молив,

* Английска монета от пет шилинга. – Б. пр.

носната кърпа, револвера с един куршум в него. Съвсем безсмислено го сграбчих и претеглих в ръката си; исках да си вдъхна кураж. Смътно си помислих, че един револверен изстрел се чува много далеч. За десет минути скроих плана си. Намерих в телефонния указател името на единствения човек, който можеше да предаде новината – той живееше в едно предградие на Фентън, на по-малко от половин час път с влак. Да, аз съм страхлив човек. Твърдя го сега, именно сега, когато вече съм изпълнил един план, който всеки би окачествил като рискован. Зная, че изпълнението му беше страшно. Не го сторих за Германия, не. Никак не ме е грижа за една варварска страна, която при това ме принуди да падна толкова ниско, че да стана шпионин. Освен това познавам един човек от Англия, скромен човек, който за мен не е по-малко от Гьоте. Разговарях с него не повече от час, но през този час той беше Гьоте ... Изпълних своя план, защото чувствувах, че Шефът презира хората от моята раса – тоест безбройните прадеди, които са събрани в мене. Исках да му докажа, че един жълтокож може да спаси войските му. Освен това трябваше да избягам от капитана. Гласът и юмруците му можеха да прогърмят всеки миг на вратата ми. Облякох се тихо, казах “сбогом” на собствения си образ в огледалото, слязох, огледах безлюдната улица и излязох. Гарата не беше далеч от дома ми, но предпочетох да взема файтон. Прецених, че така има по-малко опасност да ме познаят, всъщност насред пустата улица се чувствувах съвсем на открито и много уязвим. Спомням си, че казах на файтонджията да спре малко преди централния вход. Наложих си да сляза с една почти мъчителна бавност; отивах в село Ашгроув, но взех билет за по-далечна гара. Влакът тръгваше само след няколко минути – в осем и петдесет. Побързах, следващият тръгваше в девет и половина. На перона нямаше почти никой. Обиколих вагоните, спомням си няколко фермери, една жена в траур, младеж, потънал в “Аналите” на Тацит, един ранен и щастлив войник. Най-после вагоните бавно потеглиха. Появи се един мъж, когото познах; той напразно тича след влака до края на перона. Беше капитан Ричард Мадън. Почти изчерпан, разтреперан, аз се свих на другия край на седалката, по-далеч от вдъхващия ми страх прозорец.

Неусетно от състоянието на покруса преминах към почти отвратително щастие. Казах си, че моята битка вече е започнала и че съм спечелил първия кръг, като бях избягнал – може би за четиридесет минути, може би поради благосклонната съдба – нападението на моя противник. Реших, че тази малка победа ми предрича пълен успех. Реших, че не е малка, тъй като ако не беше тази безценна разлика в разписанието на влаковете, сега щях да бъда в затвора или вече мъртъв. Реших (не по-малко софистично), че моето подло щастие доказва, че съм способен да доведа до добър край делото. Извлякох от тази своя слабост много сили, които не ме напуснаха. Предвиждам, че в бъдеще човек ще се примирява всеки ден с все по-чудовищни неща; скоро на света ще има само воини и разбойници; давам им следния съвет: *Изпълнителят на едно чудовищно начинание трябва да си представи, че вече го е извършил, той трябва да си наложи едно бъдеще, което да е така необратимо, както и миналото*. Именно така постъпих аз, докато очите ми на вече мъртъв човек следяха как изтича този ден, който може би беше последният, и как настъпва нощта. Влакът се движеше леко сред ясенова гора. Той спря почти насред полето. Никой не извика името на гарата. *Ашгроув ли е?* – попитах някакви деца на перона. *Ашгроув* – отговориха те. Слязох.

Лампа осветяваше перона, но лицата на децата оставаха в сянка. Едно от тях запита: *При доктор Стивън Албърт ли отивате?* Без да изчака отговора, друго дете прибави: *Къщата е далеч оттук, но вие няма да се загубите, ако тръгнете по този път вляво и на всеки кръстопът пак завивате наляво.* Хвърлих им една монета (последната), слязох няколко каменни стъпала и поех по пустия път, който леко се спускаше. Беше обикновен черен път, над него се преплитаха клоните на дърветата, ниската и кръгла луна сякаш ме съпровождаше.

За миг си помислих, че Ричард Мадън вече е предугадил по някакъв начин моето отчаяно намерение. Съвсем скоро разбрах, че това е невъзможно. Съветът да завивам все наляво ми напомни, че такъв е обичайният начин да се открие централният вътрешен двор на някои лабиринти. Аз разбирам нещо от лабиринти; ненапразно съм правнук на онзи Цуй Бън, който е бил управител на Юннан и се отказал от светската власт, за да напише един роман, в който трябвало да има повече герои, отколкото в "Блян сред алени чертози"[2], и да построи лабиринт, където да се загубват всички хора. Той посветил тринадесет години на тези две различни и уморителни дела, но бил убит от ръка на чуждоземец; романът му бил безсмислен и никой не успял да открие лабиринта. Вървейки под английски дървета, размишлявах за този изгубен лабиринт; представях си го девствен и съвършен, изграден на тайния връх на една планина, представях си го погълнат от оризови полета или потънал под водата, представях си го безкраен, не вече съставен от осмостенни павилиони и ходове, които водят към своето начало, а от реки и провинции, от царства… Мислех си за един лабиринт от лабиринти, за огромен и растящ лабиринт, който да обхваща миналото и бъдещето в едно, като включва по някакъв начин и звездите. Погълнат от тези въображаеми картини, забравих своята съдба на беглец. За неопределено време се почувствувах като абстрактен възприемник на света. Неясното и живо поле, луната и вечерният час ми подействаха; подейства ми и наклонът на пътя, който не позволяваше ни най-малко да се уморя. Вечерта беше задушевна и безкрайна.

Пътят се спускаше и се разклоняваше сред вече тъмнеещите ливади. Някаква музика – пронизителна и сякаш силабична, се приближаваше и отдалечаваше заедно с повеите на вятъра, обвита в листа и разстояния. Помислих си, че човек може да бъде враг на други хора, на отделни прояви на други хора, но не и на една страна; не и на светулки, думи, градини, потоци, залези. Така стигнах до висока ръждясала порта. През решетките съзрях горичка и нещо като павилион. Изведнъж осъзнах две неща – първото обикновено, второто почти невероятно – музиката идваше от павилиона, музиката беше китайска. Затова я бях възприел толкова късно, без да ѝ обръщам внимание. Не помня дали имаше камбанка или звънец, може би повиках с пляскане. Музиката продължаваше да праща.

Обаче от дъното на близката къща се приближаваше някакъв фенер – стъблата на дърветата го закриваха отчасти, а на моменти изцяло: един хартиен фенер, който имаше формата на барабан и цвета на луната. Носеше го висок мъж. Не видях лицето му, защото светлината ме заслепяваше. Той отвори вратата и каза бавно на моя език:

– Виждам, че милостивият Си Пън е пожелал да облекчи самотата ми. Навярно искате да видите градината.

Сетих се, че това е името на един от нашите консули, и объркано повторих:

– Градината ли?

– Градината с разклоняващите се пътеки.

Нещо се раздвижи в паметта ми и произнесох с необяснима сигурност:

– Градината на моя праотец Цуй Бън.

– Вашият праотец? Вашият прочут праотец? Заповядайте.

Влажната пътека криволичеше също както пътеките в детството ми. Стигнахме до една библиотека с източни и западни книги. Познах някои ръкописни томове на Изгубената енциклопедия, подвързани в жълта коприна; Енциклопедията е била изготвена под ръководството на третия император от Светлата династия и никога не е била отпечатана. Грамофонната плоча се въртеше до бронзов феникс. Спомням си също така за някаква амфора от розов порцелан и за друга, с много векове по-стара, с онзи син цвят, който нашите занаятчии са копирали от персийските грънчари.

Стивън Албърт ме наблюдаваше усмихнат. Той беше много висок (вече го казах), с остри черти, със сиви очи и сива брада. Имаше в него нещо свещеническо, а също и нещо моряшко; после той ми разказа, че е бил мисионер в Тиендзин, “преди да се реши да стане китаист”.

Седнахме – аз на един дълъг и нисък диван, той с гръб към прозореца и един висок кръгъл часовник. Изчислих, че Ричард Мадън, моят преследвач, не ще пристигне, преди да е изминал час. Неотменимото ми решение можеше да почака малко.

– Странна е съдбата на Цуй Бън – каза Стивън Албърт. - Управител на родната си провинция, вещ астроном, астролог и неуморим тълкувател на свещените писания, шахматист, прочут поет и калиграф, той изоставил всичко, за да създаде една книга и един лабиринт. Отказал се от удоволствията, които предлагат властта, правораздаването, разнообразието в леглото, банкетите и дори познанието, и се затворил в течение на тринадесет години в Павилиона на Прозрачната Самота. След смъртта му наследниците намерили само объркани ръкописи. Както навярно ви е известно, роднините поискали да ги изгорят, обаче изпълнителят на неговото завещание – някакъв даоистки или будистки монах – настоял да бъдат публикувани.

– Ние, кръвните роднини на Цуй Бън – прекъснах го, –все още проклинаме този монах. Отпечатването е било безсмислено. Книгата представлява куп противоречиви чернови. Преглеждал съм я няколко пъти – в третата глава героят умира, а в четвъртата е жив. Колкото до другото творение на Цуй Бън, неговия Лабиринт…

– Лабиринтът е тук – каза той, като посочи едно високо лакирано писалище.

– Лабиринт от слонова кост! – възкликнах аз. – Някакъв мъничък лабиринт…

– Един лабиринт от символи – поправи ме той. – Един невидим лабиринт от време. На мене, варварина англичанин, ми бе отредено да разкрия тази прозрачна тайна. След сто години подробностите са безвъзвратно загубени и все пак не е трудно да се предположи какво се е случило. Навярно Цуй Бън е казал: *Оттеглям се, за да напиша една книга.* А друг път може би е казал: *Оттеглям се, за да построя един лабиринт.* Тогава всички са си представили, че става дума за две творения; никой не можел да си представи, че книга и лабиринт са едно и също нещо. Павилионът на Прозрачната Самота се издигал в средата на една може би трудно проходима градина; може би този факт внушавал на хората идеята за истински лабиринт. Цуй Бън умрял; в неговите обширни земи никой не открил лабиринта; объркаността на самия роман ми подсказва, че именно той е лабиринтът. Две са обстоятелствата, които ми разкриха правилното решение на задачата. Първо, любопитната легенда, че Цуй Бън възнамерявал да построи лабиринт, който да бъде именно безкраен. Второ, откъс от едно писмо, което открих.

Албърт стана. За няколко мига той ми обърна гръб; отвори едно чекмедже на златистото и почерняло писалище. Върна се с някакъв лист хартия – някога карминено червен, а сега розов и избледнял, кариран. Цуй Бън с право се бе славил като изкусен калиграф. Без да разбирам, но с вълнение прочетох думите, които беше изписал с тънка четка един човек от моята кръв: *Оставям на някои бъднини (не на всички) моята градина с разклоняващите се пътеки.* Мълчаливо върнах листа. Албърт продължи:

– Преди да открия това писмо, бях се запитал по какъв начин една книга може да бъде безкрайна. Не можех да си представя друго освен един цикличен том, кръгообразен. Книга, чиято последна страница е тъждествена с първата, с възможност да продължава така безкрайно. Спомних си за оная нощ, която е в сърцевината на “Хиляда и една нощ”. В нея царица Шехеразада (поради някаква странна разсеяност на преписвача) започва да разправя текстуално историята на хиляда и едната нощ с опасността отново да стигне до нощта, в която я разказва и така до безкрайност. Представих си също една платонична наследствена творба, предавана от баща на син, в която всеки нов индивид прибавя по някоя глава или пък с благочестиво внимание коригира страниците на своите предшественици. Тези предположения ме разсеяха, но никое от тях не съответствуваше дори и най-малко на противоречивите глави от творбата на Цуй Бън. Намирах се в пълна безпътица, когато получих от Оксфорд ръкописа, който сега прегледахте. Естествено спрях се на фразата: *Оставям на някои бъднини (не на всички) моята градина с разклоняващите се пътеки.* Почти незабавно прозрях – *градината с разклоняващите се пътеки* е обърканият роман, фразата *някои бъднини (не за всички)* ми подсказа идеята за разклоняване във времето, а не в пространството. Повторното прочитане на цялата творба потвърди това предположение. Във всички творби всеки път, когато човек се сблъска с различни алтернативи, избира една от тях и отстранява останалите; в романа на почти неразгадаемия Цуй Бън той избира едновременно всички възможности. Така той *създава* различни бъдещи времена, различни времена, които от своя страна също се размножават и разклоняват. Оттам и противоречията в романа. Фан примерно знае някаква тайна; непознат чука на вратата му. Фан решава да го убие. Естествено съществуват няколко възможни развръзки: Фан може да убие неканения гост, неканеният може да убие Фан, двамата могат да се спасят, двамата могат да умрат и така нататък. В творбата на Цуй Бън се случва всичко; всяка развръзка става изходна точка за други разклонения. Понякога пътеките на този лабиринт се събират; например вие идвате в тази къща, но в едно от възможните минали времена сте мой враг, в друго – мой приятел. Ако се примирите с моето непоправимо произношение, ще прочетем заедно няколко страници.

В яркия кръг на лампата лицето му беше несъмнено лице на старец, но в него имаше нещо непреклонно и даже безсмъртно. Бавно и точно той прочете две версии на една и съща епическа глава от романа. В първата една войска се придвижва напред към някаква битка, като прекосява пуста планина; ужасът от мрака и камъните кара войниците да презират живота и те успяват лесно да победят; във втората версия същата войска прекосява дворец, в който се чествува някакъв празник; блестящата битка им се струва продължение на празника и те постигат победа. Слушах с истинско преклонение тези старинни измислици; може би се възхищавах не толкова на тях, колкото на обстоятелството, че бяха творение на моята кръв и че един човек от една далечна империя ги възпроизвеждаше за мен – по време на едно отчаяно приключение – на един западен остров. Спомням си последните думи, които се повтаряха като тайна заповед във всяка версия: *Така се сражаваха героите – прекрасното им сърце бе спокойно, мечът им унищожаващ, – примирени да убиват и да умрат.*

От този миг нататък почувствувах както наоколо, така и в собственото си бедно тяло някакво незримо и неосезаемо гъмжене. Не движението на войските, раздалечаващи се, вървящи успоредно и накрая обединяващи се, а едно по-недостъпно, но близко вълнение, което те по някакъв начин предвещаваха. Стивън Албърт продължи:

– Не вярвам вашият прочут праотец да си е играл ненужно, създавайки различни варианти. Не мисля, че въобще е вероятно да е пожертвувал тринадесет години за безкрайното изпълнение на този реторичен експеримент. Във вашата страна романът е второстепенен жанр, а по онова време дори презрян. Цуй Бън е бил гениален романист, но също така и литератор, и мислител, който несъмнено не се е смятал за обикновен романист. Свидетелствата на негови съвременници доказват – и животът го потвърждава, – че той е имал метафизични и мистични влечения, философските противоречия заемат значителна част от романа. Зная, че от всички проблеми нито един не го е измъчвал и вълнувал толкова много, колкото необхватният проблем за времето А сега забележете: това е *единственият* проблем, който отсъства от страниците на *Градината*. Той дори не използува думата, която означава *време*. Вие как си обяснявате този съзнателен пропуск?

Изразих няколко предположения, но всички бяха неубедителни. Обсъдихме ги; накрая Стивън Албърт запита:

– В една гатанка, на която отговорът е шахмат, коя е единствената забранена дума?

Помислих за миг и отговорих:

– Думата *шахмат*.

– Точно така – каза Албърт. – *Градината с разклоняващите се пътеки* е огромна притча или гатанка, чиито отговор е думата “време”; ето тайната причина, поради която тази дума не се споменава в нея. Да се пропуска *винаги* една дума, да се прибягва до неподходящи метафори и очевидни перифрази, е може би най-превзетият начин да се посочи тази дума. Именно обиколния начин е избрал потайният Цуй Бън във всяка криволица на безкрайния си роман. Сравних стотици ръкописи, поправих грешките, допуснати поради небрежността на преписвачите, предположих, че в този хаос има някакъв план. Възстанових или поне смятам, че съм възстановил първоначалния ред, преведох цялата творба – установих, че думата *време* не е употребена нито веднъж. Обяснението е очевидно. *Градината с разклоняващите се пътеки* е непълно, но не невярно изображение на вселената, така, както я е схващал Цуй Бън. За разлика от Нютон и Шопенхауер[3] вашият праотец не е вярвал в едно време – еднородно и абсолютно; той е вярвал в безкрайни поредици от времена, в нарастваща и главозамайваща мрежа от раздалечаващи се, сливащи се и протичащи успоредно времена. Тази мрежа от времена, които се приближават, разклоняват, пресичат или които в продължение на векове се пренебрегват, тази мрежа обхваща *всички* възможности. В повечето от тези времена ние не съществуваме; в някои от тях съществувате вие, аз – не; в други съществувам аз, а вие – не; в трети съществуваме и двамата. В сегашното време, което благоприятната случайност ми е отредила, вие дойдохте у дома ми; в друго време, преминавайки градината, вие сте ме намерили мъртъв; в трето аз изричам същите тези думи, но всъщност съм някакво недоразумение, някакъв призрак.

– Във всички времена – произнесох ясно, но не без трепет – аз благодаря и се прекланям за това, че пресъздадохте Градината на Цуй Бън.

– Не във всички – прошепна той с усмивка. – Времето се разклонява вечно в безброй бъдещи времена. В едно от тях аз съм ваш враг.

Тогава отново усетих онова гъмжене, онова движение, за което вече споменах. Стори ми се, че влажната градина, която заобикаля къщата, е претъпкана с невидими хора. Тези хора бяха Албърт и аз, тайни, отрудени и проявяващи се под различни форми в други измерения на времето. Вдигнах поглед и изведнъж кошмарът се разпръсна. В жълтата и черна градина имаше само един-единствен човек; но този човек бе огромен като статуя, но този човек се приближаваше по пътеката и беше самият капитан Ричард Мадън.

– Бъдещето вече настъпи – отговорих, – но аз съм ваш приятел. Мога ли отново да прегледам писмото?

Албърт стана. Висок, той отвори чекмеджето на високото писалище, като за миг ми обърна гръб. Вече бях приготвил револвера. Стрелях с голямо внимание; Албърт се свлече на пода без стон. Кълна се, че той умря на място; все едно, че гръм го бе ударил.

Останалото е нереално и без значение. Мадън нахълта и ме задържа. Бях осъден на обесване. Беше отвращаващо, но аз победих; бях успял да съобщя в Берлин тайното име на града, който трябваше да нападнат. Вчера го бомбардираха; прочетох това в същите вестници, които съобщаваха на Англия загадката, че ученият китаист Стивън Албърт е загинат от ръката на един непознат, на име Ю Дзун. Шефът бе успял да разшифрова загадката. Той знае, че моята задача беше да посоча (въпреки грохота на войната) града, който се нарича Албърт, и че не съм намерил друг начин, освен да убия човек с това име. Шефът не знае (никой не може да знае) за моето дълбоко разкаяние и умора.”

Бележки на Борис Дубин

[1] Базил Хенри Лидъл Харт (1895–1970) – английски военен историк и теоретик.

[2] “Блян сред алени чертози” (“Хун лоу мън”) – роман от китайския писател Цао Сюецин (1715 или 1724 –ок. 1763): Ю Дзун на Борхес носи името на един от неговите герои.

[3] ...Нютон и Шопенхауер – в есето “Ново опровержение на времето” (II част –1946 г.) Борхес сочи своите източници: “Математически принципи на натуралната философия” на Исак Нютон (III, 42) и “Светът като воля и представа” на Артур Шопенхауер (II, 4).

Петьо ПЕТКОВ

раждането на алгоритмиката от
каноничните форми на разума

откровенията гьоделеви, или за
границите на формалното

Джордж БУЛОС

ново доказателство на теоремата на гьодел за
непълнота (превод от английски г. гаргов)

Петко ПЕТКОВ

РАЖДАНЕТО НА АЛГОРИТМИКАТА

ОТ КАНОНИЧНИТЕ ФОРМИ НА РАЗУМА

В тази сказка ще проследим развитието на една от важните идеи, които човечеството успя да превърне в обект на математиката. Ще видим как преди векове тя е присъствувала в математическата практика, без да бъде отчетливо съзнавана, как по-късно започва да бъде отличавана от други и как най-сетне получава математическо описание. При това последната стъпка, т. е. математическата кристализация, беше извършена през първата половина на нашия век от хора, почти наши съвременници – за разлика, да речем, от първите теории на понятието число или на понятието пространство, чиито математически образи се появиха още в Древна Гърция и въпреки наличието на модерни концепции в тази област изглеждат като осветени от дълга, много дълга математическа практика.

Бихме могли да започнем историческото си изложение от древния Вавилон, от древния Египет или от която си поискаме друга древност, но ще сторим това от по-късни времена – от VIII–IXв. от н. е., когато е във възход Багдадският халифат. По това време Халифатът е създал в Багдад научен център с богата библиотека, за която са били полагани големи грижи, с много ревност и старание. Известно е например, че след успешни войни с Византия арабите са вземали от нея не само земя и контрибуции във вид на материални ценности, но също и научни съчинения, създадени още от времето на древните гърци. Около 800г. халифът Харун ар Рашид – широко известният халиф от *Хиляда и една нощ*, прави както бихме казали днес, нещо като реорганизация на научния фронт и създава на мястото на библиотеката така наречения Дом на мъдростта (Баит ал Хикма). В този дом на мъдростта, станал извънредно активен научен център по времето на сина на Харун ар Рашид – халифа Абд Алла ал Мамун, е работил като математик, астроном и географ човек със следното име: *Мохамед ибн Муса абу Абдаллах абу Джафар ал Хорезми ал Маджуси ал Кутрубули*. Неговият живот попада приблизително в периода от 780 до 850г., т. е. по времето на нашите ханове Крум, Омуртаг и Пресиян. По онова време имената са играли ролята на кратки биографии, на кратки лични характеристики – като днешните единни граждански номера. Така например съставката "ал Хорезми" сочи произход от Хорезъм – една от древните азиатски държави, която тогава вече е била включена в границите на Арабския халифат. И досега има област Хорезъм в Съветския съюз (в Узбекска ССР)*, по-малка от бившата държава, но горе-долу на същото място – около долното течение на река Аму даря при Аралското море.

Математическите съчинения на (да го наричаме накратко) Мохамед ал Хорезми са сравнително достъпни за интересуващата се публика и до днес. Периодически, макар и рядко, те са излизали и излизат на различни езици. През 1983г. излязоха в сборник на руски език. Разбира се, днес те представляват само исторически интерес, но в Средновековието, преведени от арабски на латински, са играли важна роля в пренасянето на математическото познание от поколение на поколение. Както всички широко известни и интересни съчинения те са били подлагани на критика от редица коментатори. Една от съществените критични бележки е, че както изглежда, Мохамед ал Хорезми не е бил запознат добре с някои съчинения на своите древногръцки предшественици – например с *Аритметиката* на Диофант, където има вече наченки на употреба- на отрицателните числа. Той се ограничава да работи само с числа, които са положителни. Друга критична бележка е тази, че съчиненията на Ал Хорезми са по-скоро компилативни, отколкото оригинални. Обаче неговите книги са имали качества, поради които са били търсени, преписвани, превеждани и многократно използвани в течение на няколко века не само в арабския свят, но както вече казахме, и в Западна Европа. Те са били полезни за широк кръг от хора, а не само за учени с големи математически способности. Написаното от него е съдържало ясни, точни и разбираеми предписания от следния вид: "Ако искате да решите задачата X, трябва да извършите последователно действията Y_1, … , Y_n." Ще поясним това с един пример от неговата книга *Китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-габр в'алмукабала*. От името на тази книга (по-точно от съставката "ал-габр") произхожда днешният термин "алгебра". (Както казва един колега, съставката "алмукабала" звучи

* До разпадането на СССР през 1991 г. страната е съветска република като Узбекска ССР. От 1 септември 1991 е независима държава. След 1991г. Узбекистан влиза в състава на ОНД - Общност на независимите държави.

далеч по-.добре. Защо ли от нея нищо не произхожда?) Но да се върнем към примера. Казано в леко модернизирана форма, той се отнася до решаване на квадратни уравнения от вида

$$x^2+ax=b$$

Мохамед ал Хорезми пояснява общия начин за решаване на такива уравнения посредством уравнението

$$x^2+10x=39$$

Той казва, че:

ПЪРВО. Числото пред x трябва да се раздели на 2, значи в нашия случай ще се получи 5.

ВТОРО. Така полученото число (в нашия случай 5) трябва, да се повдигне на квадрат и да се прибави към числото, вдясно от равенството. В нашия случай получаваме 39+25, т. е. 64.

ТРЕТО. След това трябва да се намери квадратен корен от новополученото число. В нашия случай квадратен корен от 64 е 8.

ЧЕТВЪРТО. От числото, получено на третата стъпка, трябва да се извади числото, получено на първата стъпка. В нашия случай от 8 трябва да извадим 5. Получаваме 3. Именно това е и решението на уравнението.

С това завършва предписанието за решаване на уравнения от казания вид. (Проницателният съвременен читател ще забележи, че уравнението от примера има още едно решение – това е отрицателното число –13. Това решение не е пропуснато случайно. Както казахме, Ал Хорезми се занимава само с положителните числа.)

Всеки, който е прочел и разбрал Алхорезмовото предписание, вече разполага с безотказен общ метод за решаване на квадратните уравнения от вида $x^2+ax=b$. Единствените трудности, които могат да възникнат тук, са свързани като че ли само с ограничеността на времето, пространството и материала за писане (например, ако се наложи писането на някакви огромни числа). Разбира се, необходими са и някои елементарни умения за пресмятане с числа (деление на 2, събиране, повдигане на квадрат, кореннуване). Това са умения, на които човек може да бъде обучен по начин, който силно прилича и на дресирането на животни. След обучението се постига нещо, което можем да наречем "автоматизъм"; умението за подобни пресмятания се свежда, тъй да го кажем, към "механично" извършване на преобразувания, без да се налага вземане на решения "по вдъхновение" на извършителя, без да се получават спънки, които могат да бъдат преодолени само след досещане (което може "да дойде", може и "да не дойде"), без никаква игра на въображението.

Възниква съблазън да си спомним за хората от родния Хорезъм на Мохамед ибн Муса абу Абдаллах абу Джафар ал Хорезми ал Маджуси ал Кутрубули и за тяхната борба с настъплението на пустинята, каквато се води по тези места и днес. В процеса на такава борба на първо място излизат практическите инженерни задачи, които изискват ясни, точни и елементарно изпълняеми предписания; интересът към изяществото и хитроумието на математическите доказателствени построения за изпълнителите на такива предписания е на втори план. Те нямат време да се занимават със сложните умствени конструкции и да им се възхищават както древните гърци. И ето, мислейки може би за нуждите на такива хора, Ал Хорезми създава книги с рецепти за решаване на практически задачи.

Впрочем съответните доказателства в книгата *Китаб ал-мухтасар и т. н.* не липсват, само че те се появяват отделна от предписанията, едва след няколко глави. По този начин двата аспекта от решението на задачата – предписанието за действие и доказателството за коректност на предписанието – са разделени. През средните векове името на Мохамед ибн Муса абу Абдаллах абу Джафар ал Хорезми ал Маджуси ал Кутрубули получава съкратената латинска транскрипция Algorizmi. След известна еволюция тази транскрипция се превръща в термина “алгоритъм”, означаващ общ метод за решаване на някакъв кръг от задачи, при прилагането на който не са необходими творчески усилия. Алгоритми са например правилата за събиране, изваждане умножение и деление на числа, които изучаваме в основното училище. Алгоритъм е правилото за намиране на най-малко общо кратно на цели числа. Същото се отнася и за правилото за намиране на квадратен корен от число; на всеки израз, съставен посредством знаците за събиране, изваждане, умножение, деление и кореnуване, съответствува алгоритъм за намиране стойността на израза при дадени стойности на променливите. И т. н.

И така, появяването на новия термин – АЛГОРИТЪМ – показва вече ясно съзнаване на обстоятелството за съществуване на съответното понятие.

Нашият разум има поне два “дяла”. С първия си служим, когато следваме някакъв образец, някакъв канон, някакъв: АЛГОРИТЪМ. В другия дял са изворите на причудливостта, безсмислените или отчаяните експерименти, правенето на аналогии, свободното творчество, прищевките и всичко останало,.благодарение на което сме хора, а не изпълняващи точни предписания автомати.

Търсенето на алгоритми е важна задача за математика - професионалист. След като е намерен алгоритъм за решаване на задачите от някаква съвкупност А и е дадено доказателство за неговата коректност, като че ли може да се счита, че всички необходими ТВОРЧЕСКИ усилия около тази съвкупност от задачи са вече по принцип положени и оттук нататък остава само да бъдат следвани предписанията за "механични" преобразувания, описани в алгоритъма. С други думи, след като математикът професионалист е намерил алгоритъма за решаване на задачите от съвкупността А, той вече "си е изпълнил задължението" и може да предаде работата по-нататък на приложниците. (Всъщност не е точно така. Обикновено остава открит проблемът за търсене на алгоритми, решаващи същия клас от задачи, но за по-кратко време, с по-малко усилия и т. н. Но на това обстоятелство сега няма да обръщаме внимание.)

И тъй, не е чудно, че математиците са се занимавали и се занимават с благородната дейност за търсене на алгоритми. Обаче с течение на времето, с увеличаване на математическата фактология започва да се забелязва следното обстоятелство: За някои класове от проблеми въпреки дългото търсене на алгоритми за решаването им такива алгоритми не били намерени. Например Диофант, за когото вече споменахме, се е занимавал с уравнения, чиито две страни са многочлени с коефициенти цели числа, като е търсел само решения, които също са цели числа. Такива уравнения днес се наричат *диофантови*. За някои видове диофантови уравнения са били намирани алгоритми за решаването им, обаче въпреки усилията на много математици общ алгоритъм за решаване на всяко диофантово уравнение не е бил намерен. В края на краищата би могъл да възникне и следният въпрос: А дали такъв алгоритъм е възможен въобще? Въпроси от подобен род, които след дълги усилия са се оказали с отрицателни отговори, в математиката са възниквали и по-рано. Класически примери тук са знаменитите задачи от V в. пр. н. е. за удвояването на куба, за трисекцията на ъгъла и за квадратурата на кръга. В първата задача се иска по дадена отсечка a да се построи отсечка b така, че кубът със страна b да има два пъти по-голям обем от куба със страна a; във втората се иска по даден ъгъл да се построи три пъти по-малък от него ъгъл; в третата се иска по даден кръг да се построи равнолицев на него квадрат. Както бе доказано едва през XIXв., никоя от тези задачи не може да се реши само с помощта на линийка и пергел, т. е. само с помощта на чертане на прави линии и окръжности и намиране на техните пресечни точки.

И така, по аналогия с всичко това може да се зададе въпросът: Дали всеки клас от проблеми може да се решава посредством алгоритъм? Или: Кои задачи могат да се решавате алгоритми? За да можем да отговаряме на такива въпроси, би трябвало да дадем МАТЕМАТИЧЕСКО описание на понятието алгоритъм не с такива неточни думи, каквито употребявахме досега, а с точни термини, позволяващи правенето на математически разсъждения относно това понятие.

В началото на нашия век в математиката възниква още едно явление, тясно свързано с въпроса за съществуване на алгоритми—забелязано било, че някои теореми за съществуване на обекти с дадени свойства не носят никаква информация за това, по какъв начин да бъдат намерени величините, чието съществуване се твърди. Например получавали се такива ситуации: доказана е теорема от вида «За всеки обект x със свойство A може да се намери обект y, свързан с x посредством съотношението B». И въпреки че доказателството (поне на пръв поглед) изглежда напълно вярно и съвсем математическо, нито от теоремата, нито от доказателството ѝ се вижда как може да бъде извлечен алгоритъм за намиране на търсеното y по всяко x със свойството A. Докаже, да речем, някой математик, че при еди-какви си условия съществуват обекти с такива и такива свойства. След това във връзка с конкретна задача някой го замолва: Добре, при мен условията са налице, хайде да намерим обектите. И изведнъж се оказва, че не се знае как може да стане това намиране. А, от друга страна, в доказателството като че ли няма никаква грешка! Интересно положение, което си заслужава разискване и наистина е било дискутирано доста в началото на нашия век. Такива теореми получили името «чисти» теореми за съществуване. Как става така, че понякога, «без да се усетят» (и като че ли без да грешат) математиците доказват чисти теореми за съществуване? И с какво, може да бъде полезна една такава чиста теорема? Да речем, че сме я доказали — с какво си подобряваме положението в сравнение с момента преди нейното доказване? Разбира се, в духа на нашите мисли не е трудно да си зададем и въпроса: А може би не на всяка такава «чиста» теорема съответствува алгоритъм, намиращ обектите, чието съществуване тя твърди?

Впрочем първият математик, занимаващ се с математическо уточняване на понятието «алгоритъм», изхожда от трета подбуда.. Този математик е Емил Л. Пост (1897—1954) — човек с тежка съдба, страдащ от повтарящи се кризи на хронично заболяване, които периодически го правели неработоспособен. През 1921г. той публикува много сериозен резултат от областта на математическата логика — един от първите резултати в тази наука, които не могат да бъдат наречени нито очаквани, нито лесно доказуеми. През 1941г. Пост предлага за печат статия под название *Абсолютно неразрешими твърдения. Отчет за едно предугаждане.* По онова време статията е била отхвърлена. Отпечатана е за първи път през 1965г. от неговия ученик Мартин Дейвис. От нея се вижда, че Пост е размишлявал над въпрос, еквивалентен на въпроса «що е алгоритъм» през периода 1920—1924 г. и всъщност е предугадил търсения отговор, въпреки че не е успял да приготви работата си в съвсем окончателен вид.

Споменахме, че той изхожда от трета подбуда, и сега ще я опишем накратко. Във връзка с логическите изследвания в основите на математиката по онова време, т. е. в началото на нашия век, вече са били дадени точни описания на някои математически теории, като се изхождало от следната представа, завещана ни по същество от древните гърци: Всяка математическа теория се състои от основни положения (аксиоми), от които с помощта на правилата за извод се получават останалите твърдения на теорията. В началото на нашия век логиците математици дават пълни описания на няколко такива теории (някои от които предназначени да включат в себе си «цялата математика»), имащи следните характерни особености:

а) има алгоритъм за разпознаване на аксиомите измежду останалите твърдения;

б) всяко правило за извод се отнася само за фиксиран краен брой обекти, т. е. с негова помощ се извежда ново твърдение, като се използват само фиксиран краен брой предпоставки (за различни правила този брой може да бъде различен);

в) има алгоритъм, с помощта на който за всяко твърдение може да се разпознае дали следва от дадени твърдения посредством дадено правило за извод.

Теории, описани по този начин, днес се наричат формални системи. Както виждаме, възможността за творчество, за проява на досещане при доказване на твърдения от една формална система се състои в избора на «пътя на доказателство», т. е. в избора на последователността от прилаганията на правилата за извод. И сега можем да се запитаме: дали предвидената от създателите на формалните системи свобода на действие е достатъчно широка, за да смятаме, че формалните системи описват пълно и правилно математическата дейност по търсене на верни твърдения ния и техните доказателства? Дали всяка математическа теория може да се представи като формална система?

Както ще видим в следващата сказка, посредством формалните системи наистина не може да се даде правилно и пълно описание на математическата дейност. Но, разбира се, за да се докаже това, първо трябва да се даде математическа дефиниция на понятието «формална система». Емил Пост се заел именно с тази задача. Читателят, като има предвид особеностите а), б) и в), сигурно вижда, че въпросът «що е формална система» има тясна връзка с въпроса «що е алгоритъм». Впрочем връзката е дори по-тясна, отколкото може да изглежда на пръв поглед, но на това няма да се спираме сега.

Горе-долу по същото време както Пост, съвсем малко по-късно френският математик Жак Ербран (1908—1931) започва да се занимава с логически изследвания, свързани с аритметиката, т. е. с теорията на целите неотрицателни числа. Естествено е да се зададе въпроса: «Що е аритметична функция?» и Ербран си отговаря така: «Аритметична функция е нещо, което се задава посредством характеризиращи го равенства.» Тези равенства показват с помощта на какви действия се изчислява стойността на функцията, като се тръгне от дадените стойности на аргументите ѝ. Например сборът $f(x, y)$ на две числа може да се зададе с помощта на следните две равенства:

$$f(x, 0) = x$$
$$f(x, y + 1) = f(x, y) + 1$$

Ето как, използвайки тези равенства, можем да пресметнем 5+3, т. е. $f(5, 3)$. Първо пресмятаме $f(5, 0)$. Съгласно първото равенство това е 5. След това, като използваме второто равенство, пресмятаме последователно $f(5, 1)$, $f(5, 2)$ и $f(5, 3)$ така:

$$f(5, 1) = f(5, 0) + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$f(5, 2) = f(5, 1) + 1 = 6 + 1 = 7$$
$$f(5, 3) = f(5, 2) + 1 = 7 + 1 = 8$$

Съвсем алгоритмична, т. е. съвсем «безмозъчна» дейност, нали? След като току-що дефинирахме $f(x, y)$, ще оставим на читателя да провери, че следващите равенства дефинират $g(x, y)$ като произведение, а $h(x, y)$ — като степен на x и y (тук под 0^0 разбираме числото 1):

$$g(x, 0) = 0,$$
$$g(x, y + 1) = f(g(x,y), x),$$
$$h(x, 0) = 0,$$
$$h(x, y + 1) = g(h(x,y), x).$$

Ербран не е успял да реализира идеята си докрай. По време на екскурзия в планината се случва нещастие — едно закрепващо въже се оказва несигурно и той загива. Малко преди смъртта си Ербран е в кореспонденция с Курт Гьодел (1906— 1978), за когото ще поговорим надълго в следващата сказка. Гьодел доразвива още малко идеята на Ербран, уточнявайки, че стойностите на функциите, определени с равенства, трябва да се пресмятат само чрез прилагане на действието заместване (на изрази с равни изрази). Това може да се види от лекциите му през 1933/34 учебна година, четени в новообразувания тогава Институт за висши изследвания в Принстън, САЩ, записани от слушателите му С. К. Клини и Дж. Б. Росър. Впрочем той е разглеждал само функции, дефинирани за всички естествени числа. По-късно С. К. Клини премахва това ограничение. По този начин се получава клас от аритметични функции, всяка от които всъщност е алгоритъм за преобразуване на естествени числа в естествени числа. Този клас е много широк. А по-нататък? Възможни ли са алгоритми от областта на аритметиката (т. е. чиито аргументи н стойности са естествени числа) и които са вън от този клас?

Горе-долу по същото време върху въпроса «що е алгоритъм» размишлява и Алонзо Чърч (1903 - 1995) — един от бащите на съвременната математическа логика. През 1932 г. той предприема опит за създаване на всеобхващаща формална система, която да включи цялата математика. За съжаление, както и други извънредно амбициозни проекти, неговата теория се оказва дефектна. Споменатите вече С. К. Клини и Дж. Б. Росер през 1935г. доказват, че в системата на Чърч има противоречие, обаче се оказва, че част от тази система остава незасегната от противоречието и може да служи за изясняване на понятието «функция». Теорията на Чърч се нарича «смятане с λ-конверсия» и представлява специален начин за писане означенията на функции, придружен от прости правила за търсене стойностите на функциите. Ядрото на тези правила е (както и в дефиницията на Ербран — Гьодел — Клини) операцията за заместване на едни изрази с други. От края на 1933 г. Чърч започва да предполага, а сетне все по-уверено да твърди, че смятането с λ-конверсия е всъщност математическа дефиниция на интуитивното понятие «алгоритъм». Съществува писмено свидетелство за съмненията на неговия ученик Клини и за опитите му да опровергае това. Известно време Гьодел също изразява съмнения. Обаче през 1936 г. след неуспешни опити за опровержение Клини вече окончателно се присъединява към възгледа на Чърч и освен това доказва, че що се отнася до аритметичните алгоритми, дефинициите на Чърч и на Ербран — Гьодел — Клини са еквивалентни, т. е. всяко описание на алгоритъм, което може да се направи по начина на Ербран — Гьодел — Клини, може да се направи и по начина на Чърч и обратно. Същата година излиза статията на английския учен Алън М. Тюринг (1912—1954) *Върху изчислимите числа, с приложение към проблемите за разрешимост*. По идея на Тюринг *изчислимо* е такова реално число, за което има алгоритъм, пресмятащ, за краен брой стъпки всяка цифра от неговото десетично представяне. По тоя начин, поставяйки въпроса, кои числа са изчислими и кои не, той, разбира се, стига и до въпроса, що е алгоритъм. Този въпрос у него е свързан с въпроса, кои изчисления могат да бъдат извършени с машина и кои не. Що е изчислителна машина? Как би трябвало да бъде устроена една машина, която имитира най-добре дейността на човека изчислител? Според Тюринг такава машина трябва да има «запаметяващо устройство», в което да се съхраняват наличните данни, междинните резултати и крайният резултат (ако се стигне до такъв). Паметта трябва да бъде разделена на различни (неограничен брой) участъци, наречени клетки. На всеки такт от работата на машината може да се преработва съдържанието само на краен брой от клетките, а останалото съдържание си остава непроменено. Част от паметта на машината във всеки такт от работата ѝ характеризира нейното «вътрешно състояние», от което зависи действието при следващия такт. Самите действия се изразяват отново в заместването на едни изрази с други. Формулировката на Тюринг също се оказа ла еквивалентна на формулировките на Чърч и Ербран — Гьодел — Клини в смисъл, че аритметичните функции, изчислими с машина на Тюринг, се оказали същите, както например при Чърч. Същата година дал дефиниция на понятието «алгоритъм» в кратката си статия *Крайни комбинаторни процеси, формулировка* и Емил Пост. Разбира се, и тази дефиниция била еквивалентна на останалите. Всичко това окончателно укрепило убеждението, че действително е намерена математическа дефиниции на интуитивното понятие за алгоритъм. «Направено е фундаментално откритие, отнасящо се до математизационните възможности на Homo Sapiens» — писал Пост.

Днес имаме и много други, различни по форма, но еквивалентни помежду си математически дефиниции на понятието «алгоритъм». Убеждението, че тези дефиниции са правилни, се нарича «тезис на Чърч». Остава да кажем какво е след всичко това положението с теоремите за неосъществимост на алгоритмите. За много класове от задачи вече е доказано, че няма алгоритми, решаващи всички задачи от такъв даден клас. Например през 1970г. Ю. В. Матиясевич от Ленинград (днес Санкт Петербург) доказа, че няма алгоритъм за решаване на всички диофантови уравнения. Редица «чисти» теореми за съществуване се оказаха, тъй да го кажем, прекалено «чисти», т.е., за тях няма алгоритми, намиращи обектите, чието съществуване се твърди. Както вече споменахме, формалните системи не отразяват правилно творческата математическа дейност и това също е свързано с обстоятелствата за неосъществимост на алгоритмите.

Ще опишем едно разсъждение, на което се основават много теореми за неосъществимост на алгоритми:

Всеки алгоритъм си има описание. Бихме могли да считаме, че описанията са текстове на български език. Всъщност едно описание може да се зададе така, че да играе роля и на начален обект в работата на алгоритъма. Например да си мислим, че сме се ограничили само с разглеждането на аритметични алгоритми. Всяко описание на такъв алгоритъм представлява някакъв текст; обаче този текст може да бъде зашифрован с число, като се използва начин, подобен на описаните в някои криминални романи. Би могло, да речем, всяка буква и препинателен знак от азбуката, а също и интервалът между две думи да се закодират с двуцифрено число, след което буквите, препинателните знаци и интервалите между думите в текста да се заменят със съответните им числа. Пример: Да зашифроваме буквите а, в, д, е, з, и, л, н, о, р, с, т, ч съответно с числата 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 72, 80, 90, 11, 12 и 13, а границата между две думи с 99. Тогава указанието

РАЗДЕЛИ ЧИСЛОТО НА ДВЕ

се зашифрова с

90105030407060991360117080128099721099302040.

Фиксираме един такъв начин за задаване на описания (кодове) на алгоритми, при който описанията могат да се разглеждат: и като начални данни. Ако *f* е алгоритъм, с {*f*} ще означаваме описанието му (по-точно кода на описанието).

По-нататък ще отбележим, че при дадени начални данни работата по прилагане на даден алгоритъм може да завърши, а може и да не завърши. Например да вземем алгоритъма, зададен с предписанието, състоящо се от следните две точки: «ПЪРВО, ако даденото число е нечетно, крайният резултат е 1; ако е четно, премини към втора точка; ВТОРО, умножи даденото число по две и извърши отново действието от първа точка.» Този алгоритъм преработва всяко нечетно число в 1, но не завършва работата си над никое четно число. Сега си задаваме следния въпрос: Има ли алгоритъм, който завършва работата си точно върху описанията на алгоритмите, които не завършват работата си върху своите собствени описания? Ще докажем, че такъв алгоритъм не съществува. Наистина, да допуснем, че сме намерили такъв, и да го означим с *H*. Тогава за произволно взет алгоритъм *f* алгоритъмът *H* завършва работата си върху {*f*} точно тогава, когато *f* не завършва работата си върху {*f*}. В частност получаваме, че

H ЗАВЪРШВА РАБОТАТА СИ ВЪРХУ *{H}*
ТОЧНО ТОГАВА, КОГАТО
H НЕ ЗАВЪРШВА РАБОТАТА СИ ВЪРХУ *{H}!*

Получихме противоречие! И така, доказахме неосъществимостта на алгоритъм с казаното свойство.

По-нататък новосъздадената теория бе свързана и с други въпроси. Така например в статията на Тюринг, за която говорихме, много скоро се оказа, че има грешка! Не, не в дефиницията на понятието алгоритъм, а в увереността, че е целесъобразно понятието «реално число» да се дефинира като безкрайна десетична (или каквато искаме систематична) дроб. Излиза, че при такава несполучлива дефиниция няма алгоритъм дори за събиране на две реални числа! Тюринг поправя грешката си и пише, че е бил подведен, надявайки се при алгоритмичните въпроси да са валидни същите логически закони (в частност т. нар. закон за изключеното трето), които знаем от класическата логика. Днес съответните логически въпроси са разработени много добре. Нямаме възможност да навлизаме в подробности и само ще споменем, че много тясно свързана с понятието за алгоритмична изчислимост се оказа частта от логиката, разработвана от школата на Л. Брауер, за когото ще кажем няколко думи в следващата сказка. Друг пример е теорията за сложност на алгоритмите, която между другото даде и нов подход към понятието «вероятност».

Днес изследванията, породени от алгоритмичната тематика, са в бурен подем. Удивително е, че раждането на алгоритмиката изпревари само с няколко десетилетия индустриалния напредък, който доведе до създаване на новите изчислителни машини — тези произвеждани във все по-съвършена и по-съвършена форма имитатори на каноничната дейност на нашия разум. Практиката по тяхното използване породи извънредно широк интерес към алгоритмичните въпроси и стана извор за нови теоретични задачи. Но това вече е извън темата на нашата сказка.

Петко ПЕТКОВ

ОТКРОВЕНИЯТА ГЬОДЕЛЕВИ ИЛИ ЗА ГРАНИЦИТЕ НА ФОРМАЛНОТО

Както предишната до голяма степен и тази сказка ще следва историческата канава на някакви събития. Види се, това е един от най-лесните начини за един сказчик да развие някаква идея, ако не знае как другояче да задържи вниманието на слушателите.

Ще посочим главната дата на нашата сказка още отсега — това е 7 септември 1930 г., когато в Кьонигсберг (днес Калининград*) се е състояла дискусия върху основите на математиката в края на Втората конференция по епистемология на точните науки (от 5 до 7 септември), организирана от Дружеството по емпирична философия в Берлин. Почти по същото време в Кьонигсберг са били проведени още две мероприятия: 91-вият конгрес на немските лекари и естествоизпитатели и Шестата немска физико-математическа сесия. Всички тези мероприятия са били свързани с едно събитие от личен характер, засягащо Давид Хилберт (1862—1943) — още приживе признат за един от най-големите математици на своето време. Това събитие било пенсионирането на Хилберт. Градският съвет на родния му Кьонигсберг решил да го провъзгласи за свой почетен гражданин, а негови колеги и ученици организирали серия доклади в чест на своя учител и вдъхновител. В края на конференцията по епистемология на точните науки — на 7 септември, била проведена дискусия върху основите на математиката — въпрос, върху който Хилберт бил работил дотогава не по-малко от 30 години.

Активните занимания на математиците с въпроси от основите на математиката са започнали от края на миналия век**; те продължават и досега, но трябва да подчертаем, че са били в много критичен стадий през първата половина на нашия век***. Причините за кризата са няколко.

Първо, в математиката както и във всички други науки има

* През 90-тте години на 20в. се поставя въпросът за възстановяване на името Кьонигсберг, но до 2011 това не се е случило.

** 19 век.

*** 20 век.

стремеж към систематизиране на нещата. При това в математиката на предно място излизат връзките между различните твърдения. Математическите теории се изграждат във вид на системи, при които се тръгва от някакви «основни» (т. е. «начални») понятия и «основни» (т. е. «начални») твърдения, като след това се показва как от основните твърдения следват други твърдения, как с помощта на основните понятия се дефинират други понятия. Има стремеж така образуваните системи да бъдат колкото е възможна по-«красиви», т. е. в тях .лесно да се виждат връзките между отделните факти, така че тези теории не само да съдържат полезни сведения, които могат да се прилагат в практиката, а и самите теории да доставят удоволствие при изучаване и при работа с тях.

Второ, в математиката има и стремеж от друг характер: да бъдат получавани колкото е възможно по-силни резултати. А какво значи силен математически резултат? Това е твърдение, което е приложимо в много случаи. Когато един математик желае да създаде нова теорема, неговата цел е да направи така, че теоремата да бъде приложима в много ситуации. Например, както споменахме в предишната сказка, има начин за решаване на квадратни уравнения, завещан ни от Ал Хорезми или някой негов предшественик. Ако друг математик посочи метод за решаване на по-широк клас уравнения — да речем, такива, в които неизвестното може да участвува в трета и четвърта степен, — неговият метод ще бъде по-силен от този, който е годен само за решаване на квадратните уравнения.

И така, естествен е стремежът за намиране на все по-силни и по-силни (или, както се казва, по-общи) твърдения, които в компактен вид да обхващат многобройни случаи. В края на XIXв. този стремеж към максимална общност добива големи, може би дори хипертрофирани размери и се увенчава със създаването на теории, съдържащи извънредно общи теореми. Такава е теорията на множествата, създадена от немския математик Георг Кантор (1845—1918). Благодарение на реформите в нашето средно и начално училище доста деца, майки, бащи, баби, дядовци, вуйчовци и лели научиха какво е множество, но все пак тук ще дадем някои пояснения. Множество — това е съвкупност от елементи, на която гледаме като на един цялостен, вече нов обект. Например всички ние, които присъствуваме на тази сказка образуваме едно множество. Друго множество е например множеството на всички цели числа, трето — множеството на всички .дробни числа и т. н.

Създаването на теорията на множествата е свързано със следното наблюдение: Обикновено математическите теореми имат -следния вид: «Ако са изпълнени условията A_1 A_2, . . . , A_n, то е налице следствието B.» Условията A_1, A_2, . . . , A_n, т. е. предпоставките на теоремата, определят някакво множество, а именно множеството, съдържащо точно тези обекти, за които са налице A_1. . . , A_n. Условието *B*, за което става дума в заключението на теоремата, определя по същия начин някакво множество, т. е. теоремата твърди, че всички елементи на първото множество са елементи на второто множество. Това показва, че една теория на множествата би могла да бъде, ако не друго, то поне нещо като универсален език за математиката и оттук да бъде поставена в основите на цялата математика.

Теоретикомножествените изследвания, започнали в края на 19 век, са свързани с още една надежда — да се овладее с математически средства понятието «безкрайност». Множествата от математически обекти са много често безкрайни — такива са например множеството на целите числа, множеството на дробните числа, множеството на простите цели числа, множеството от някакви (да речем всичките квадратни) уравнения, множеството на всички многоъгълници и т. н. В теорията на множествата бил разработен метод за сравняване на различните безкрайности; по същия начин, както крайните множества могат да съдържат различно количество елементи, се оказало, че безкрайните множества са различни по сложност и големина. Несъмнено това е било съществено откритие.

За теорията на множествата ще ни говори повече проф. Димитър Скордев в сказката си за Канторовия рай.

И тъй, създадена била теория, за която се е считало, че може да бъде поставена в основите на математиката. С други думи, тази теория е трябвало да удовлетвори напълно стремежите към системност и общност, че и нещо повече. Обаче изведнъж, както се е случвало и друг път с претенциозни начинания, теорията на множествата започнала да дава дефекти. Дефектите в математиката понякога се забелязват късно, така да се каже, във «висшите» раздели. Но когато вече знаем, че има дефект, обикновено това може да се демонстрира просто. И ето сега ще изложа едно широко известно разсъждение, което ще изглежда странно и ще се отнася за множества. Първо, да отбележим, че има множества, които не съдържат себе си. Такова е множеството, съставено от всички нас в тази аудитория, защото самото то не е нито сказчик, нито организатор, нито слушател, нали? Това е една голяма група от хора, но самото то не е човек и значи не се съдържа в себе си. Да вземем сега множеството на всички такива множества, т. е.

МНОЖЕСТВОТО НА ВСИЧКИ МНОЖЕСТВА,
КОИТО НЕ СЪДЪРЖАТ СЕБЕ СИ

Да се запитаме: съдържа ли това множество себе си? Ако то съдържаше себе си, тъй като съдържа само такива множества, които НЕ съдържат себе си, ще излезе, че то себе си не съдържа. Стигнахме до противоречие. Значи то не съдържа себе си. Но тогава, боже мой, тъй като то трябва да съдържа всички множества, които не съдържат себе си, излиза, че съдържа себе си! Такова множество, знаете: съдържа себе си точно тогава, когато себе си не съдържа! (Смях)

Добре, това изглежда като фокус, като шега. Но все пак в една математическа теория такива шеги са нежелателни. Впрочем нека отбележим, че първите противоречия, забелязани в теорията на множествата, са били други, появявали са се в нейните «висши» раздели и са имали по-сложен характер. И ето възникнала необходимост да се ревизира тази теория, да се изгради отново по такъв начин, че в обновената теория да не се появяват парадокси. Как да стане това? Имало е вече образци за изграждане на теории (дадени по същество още от древните гърци), които биха могли да дадат гаранция — поне на пръв поглед — срещу подобни явления. За това споменахме и в предишната сказка, и отчасти в началото на тази. Методът се състои в следното: Първо, издирват се онези обекти и твърдения в теорията, от които може да се изведе всичко останало. Всяка теорема за краен брой стъпки все отнякъде се извежда или поне такова е общото впечатление, нали?

Следователно, ако е дадена теорема заедно с нейното доказателство, може да се види от кои твърдения тя следва, за тези твърдения също може да се види те пък откъде следват и т.н. Подобно е положението и с понятията в дадената теория — всяко понятие, което си има специално определение, се дефинира с помощта на понятията, влизащи в това определение; тези нови понятия също се дефинират с помощта на други, но в края на краищата този процес на свеждане на едни понятия към други би трябвало да спре. Това дава надежда, че след достатъчно подробен и упорит анализ могат да се издирят някакви основни твърдения (аксиоми) и основни понятия, с помощта на които да се дефинират всички останали понятия и да се докажат всички теореми на теорията. И тъй, било решено, че по отношение на теорията на множествата цялата работа е да се разбере кои твърдения и кои понятия трябва да бъдат взети като основни и след това да се покаже, че когато се излиза от основните твърдения, чрез математически разсъждения не може да се достигне до подобни парадокси.

Добре, но тогава (всъщност за първи път в математиката)' сериозно възникнал въпросът: По какъв начин извеждаме едни твърдения от други? Древните гърци и средновековните схоласти са се занимавали с подобни въпроси, но техните резултати все още са били твърде частични и незадоволителни. И тъй, логиците сериозно се заинтересували от логико-математически проблеми, а математиците — от логически проблеми. Трябвало е да се направи пълно описание на основните логически закони, с помощта на които от аксиомите на теорията на множествата могат да се изведат всички верни твърдения, и освен това да има гаранция, че глупости не могат да се извеждат, защото теорията на множествата е била предназначена да стои в основите на математиката, а щом като в основите започнем да извеждаме (т. е. поставяме) глупости. . .

Глас от залата. Що е «глупост», бихте ли пояснили?

П. Петков. Що е «глупост» ли? Например това, което видяхме в началото — множество, което принадлежи на себе си точно тогава, когато не принадлежи. Глупост е нещо, пред което човек седи в недоумение и не би желал да го има в теорията. Разбира се, трябва да призная, че не е лесно да се даде пълен и честен отговор на Вашия въпрос. За различни хора и в различни ситуации преценките за глупост могат да се различават, и то даже в математиката.

Слушател. Обаче Вие негласно приемате, че такова множество съществува.

П. Петков. А защо да не приемам?

Слушател. Но все пак можем да кажем, че такова множество води към противоречие. (***П. Петков.*** Да!) Значи, не съществува такова множество.

П. Петков. Разбира се, ние можем да кажем, че множеството на всички множества, които не съдържат себе си, не съществува. Тогава парадоксът, който вече видяхме, ще изчезне от теорията, тъй като (трябва да се предполага, че) има смисъл да доказваме теореми само за съществуващи неща. Например никой не би се учудил, ако с помощта на двуправоъгълни триъгълници (т. е. триъгълници, които имат по два прави ъгъла) успеем да получим парадокс в елементарната геометрия от средното училище. По-скоро мнозина биха се учудили, че сме се наели да разсъждаваме за подобни несъществуващи обекти. Но да се върнем към теорията на множествата. Кои дефиниции на множества тук водят към парадокси? Сигурни ли сме, че някой няма да ни покаже друго противоречиво разсъждение, в което участват ДРУГИ множества? Бихме могли, след като ни бъде показано такова разсъждение, отново да кажем: «Е, да, но тези множества, които употребихте, не съществуват!» Лошото е, че констатацията за несъществуване при тази стратегия идва някак късно, тъй като не разполагаме с критерий за съществуване, който може .да се употреби ПРЕДИ достигането до противоречие.

Слушател, Въпросът всъщност става такъв: Съществува ли нещо, което съдържа в себе си противоречие, или не съществува?

П. Петков. Днес логиците не се боят от противоречивите теории както преди 50—100 години. Но сега ще оставим това настрана. Във всеки случай ясно е, че не е хубава математическа теория, която непрекъснато е застрашена от поправки: Днес трябва да я поправим, защото някой намерил в нея нещо нежелателно; утре трябва да я поправим, защото друг намерил нещо и т.н. А пък тази теория на всичко отгоре е с претенции за основна теория, върху която ще се базират останалите.

И тъй, казахме, че много математици съсредоточили вниманието си върху логически въпроси. Били извлечени от практиката на математическите разсъждения основните логически закони. Били написани дебели книги с цел АБСОЛЮТНО СИСТЕМНО излагане на математиката, протичащо по следната схема: Дава се точно описание на логическите закони, с помощта на които от едни твърдения извеждаме други, описват се с математическа точност основните понятия и аксиомите, като след това на практика се показва, че от аксиомите с помощта на логическите закони стъпка по стъпка могат да се изведат (т.е. да се докажат) всички важни математически теореми. Подобен подвиг (като че ли първият) е извършен от Готлоб Фреге (1848— 1925) — немски логик и математик. Друг такъв подвиг е извършен от италианския математик Джузепе Пеано (1858—1932), който заедно със сътрудници създава многотомно съчинение, наречено *Формуляр на математиката.* В труда на Фреге (след излизане на първия му том през 1893 г., докато вторият се подготвял за печат) през 1902 г. било намерено противоречие от младия тогава английски учен Бертран Ръсел (1872—1970). Всъщност парадоксът, за който говорихме в началото на сказката, следва именно разсъждението на Ръсел. Казват, че за Фреге това било силен удар, и след това той престанал активно да се занимава с логико-математически въпроси. Ръсел решил да поправи Фреге и да създаде своя собствена система за логическо описание на математиката. В резултат се появява съчинението *Principia Mathematica,* състоящо се от три дебели тома, написани от Алфред Уайтхед и Ръсел, издадени съответно през 1910, 1912 и 1913г. Ще кажа няколко думи за основната идея на Ръсел, макар че това не е съществено за следващото изложение. Множествата се разглеждат като разпределени на слоеве. В първия слой влизат множествата, чиито елементи не са множества. Вторият слой се състои от множества, чиито елементи са множества от първия слой. Третият слой се състои от множества, чийто елементи са множества от втория слой, и т. н. Ако се ограничим само с така разделените на слоеве множества, , разсъждението, с което преди малко достигнахме до противоречие, вече не може да се проведе. Излиза, че множеството на всички множества, които не съдържат себе си, не фигурира в теорията на Ръсел—Уайтхед, нали? За него няма слой в тази теория. (Към преждеговорившия слушател: По този начин в теорията на Ръсел—Уайтхед Вашето мнение за несъществуване намира реализация.)

В системата на Ръсел не било намерено противоречие, също и в системата на Пеано. Една важна система, която по идея също би трябвало да бъде годна за поставяне в основите на математиката, е дадена през 1908 г. от Ернст Цермело (1871 —1953), допълнена сетне от Ейбрахам Френкел (1891—1965). Тя използва — неявно — идеята на Ръсел, но е много по-проста за изучаване. В системата на Цермело — Френкел досега също не е намерено противоречие. Но противоречие е било посочено в теорията на Кантор, а също и в системата на Фреге, откъде можем да имаме гаранция, че по-късно няма да бъдат забелязани противоречия в останалите системи?

Впрочем досега не съм обяснил какво значи в една математическа теория да има противоречие. Това означава, че в теорията има твърдение, което може да бъде доказано в нея, а също така може да бъде доказано и неговото отрицание. Чувствува се някак, че не е хубаво в математическа теория да се появяват такива неща. Освен това логическите закони, екстрахирани в края на миналия и началото на нашия век, били такива, че се виждало следното: Ако една теория е изградена въз основа на тях и в нея има противоречие, то в тази теория може да се докаже всяко нейно твърдение. Е, от такава теория, в която всички твърдения са доказуеми, едва ли може да има полза.

Та ето това са отчасти събитията, които са привлекли вниманието върху основите на математиката. Имало е и още едно обстоятелство, работещо в същата насока. Независимо от тревогите около противоречията, в математиката започнали все по-често да се появяват теореми, в които се твърди, че съществуват обекти с определени свойства и въпреки това за намирането на тези обекти не се посочва никакъв метод. На предишната сказка донякъде коментирахме такива теореми, т. е. така наречените чисти теореми за съществуване. В началото на века започнало активно издирване на причините за тяхната поява. Освен това активно е бил разискван и въпросът, какъв смисъл може да се вложи в една теорема за съществуване, каква полза може да се извлече от нея, след като няма метод за намиране на обектите, чието съществуване тя твърди. Между многото гласове ще споменем този на един яростен и енергичен критик — холандския математик Льойтзен Егберт Ян Брауер (1881 —1966). Първата си критична статия по този въпрос *(Недостоверност на логическите принципи)* написал през 1908 г. Той подложил на много сериозна критика изобщо методите на разсъждение в математиката, и то именно методите, свързани с безкрайни множества. Математиците много често разсъждават именно за обектите от такива множества. Брауер твърдял, че част от логическите методи, които — както вече казахме — по това време били описани, са неприемливи, когато се разсъждава за свойства на обекти от безкрайни съвкупности. Така например според него тоталното използване на закона за изключеното трето в такива случаи е погрешно. Какво гласи законът за изключеното трето? Той гласи: Всяко твърдение или е вярно, или е невярно — трета възможност няма. Оттук получаваме, че ако е дадено някакво свойство, то или е налице за даден обект, или не е налице. И тук Брауер пита: Да си мислим, че имате някакво свойство. Откъде сте сигурни, че какъвто и обект да вземете, ще можете да констатирате, че това свойство за този обект или е налице, или не е налице? Свойството би могло да бъде такова, че за изясняване на въпроса да са необходими безбройно много проверки, след като вече сме допуснали възможността да работим с елементите на безкрайни множества. Как ще бъдат извършени тези проверки докрай?

Брауер става родоначалник на ново направление в математиката. Той няма други аргументи в спора си с установените тогава виждания освен твърдението, че тези виждания не са съгласувани с интуицията. Поради това породеното от него направление се нарича «интуиционизъм». Интуиционистите разсъждават, следвайки малко по-други логически закони, не същите, по които обучаваме нашите студенти по математика от първи и втори курс. Но темата за интуиционизма би могла да бъде предмет на отделна сказка, а сега вече стигаме до описание на онова «ФОРМАЛНО», чиито граници са споменати в заглавието.

И така, в началото на века има предостатъчно спорове. Хилберт характеризира получилото се състояние на нещата като скандално и предлага програма за преодоляване на скандала. Една от основните идеи на тази програма се състои в следното: Видяхме, че ни хвърлят в недоумение въпроси, свързани с понятието за безкрайност и с понятието истинност. Поради това на първо време, докато се занимаваме с въпроса, дали правилно сме построили нашата математическа система, от истинността на твърденията няма да се интересуваме и по възможност ще се стараем да елиминираме безкрайността. Ще се интересуваме само от следното: Първо, как изглеждат външно ЗАПИСИТЕ на обектите, твърденията, свойствата и съотношенията на нашата система, т.е. от тяхната ФОРМА. Второ, кои от тези записи са записи на аксиоми. Трето, какви промени в записите на твърденията предписват логическите правила, с чиято помощ конструираме изводи.

Ще поясня това с един пример. Разбира се, примерът далеч няма да обхваща цялата математика; ще разгледаме решаването на уравнението

$$x + 2 = 4$$

Можем да решим това уравнение, без да се интересуваме от неговия смисъл. Гледаме на него само като на запис, съставен от буквата «x», знака «+», цифрата «2», знака «=» и цифрата «4». Нека това уравнение и равенството $2 + 2 = 4$ са единствените аксиоми. Освен това имаме следните правила за извод:

а) запис от вида $A + B = C$ може да се преобразува в запис от вида $A = C - B$;

б) от два записа от вида $B = A$ и $C = A$ може да се премине към записа $B = C$ (обърнете внимание — тук вдясно на първото и второто равенство имаме един и същ запис A).

Сега да започнем преобразуванията:

От $x + 2 = 4$ по правило а) получаваме $x = 4 - 2$.

От $2 + 2 = 4$ по правило а) получаваме $2 = 4 - 2$.

От $x = 4 - 2$ и $2 = 4 - 2$ по правило б) получаваме $x = 2$.

И тъй, от $x + 2 = 4$ изведохме $x = 2$, без да се интересуваме дали 4 и 2 са означения на числа, дали знакът «=» изразява равенство и т. н. На всяка стъпка в процеса на преобразуването се борави само със знаци: едни знаци се заместват с други или се появяват знаци там, където е нямало, или се махат знаци оттам, където ги е имало. Всъщност на всяка стъпка се извършват същите действия, които се вършат и при прилагане предписанията на алгоритми. Само че при алгоритмите има детерминираност — всяка следваща стъпка е точно определена от предишните. Тук е оставена възможност за творчество: общо казано, след всеки етап на процеса човек сам трябва да решава каква да бъде следващата стъпка, т. е. кое правило да прилага.

Тази част от програмата на Хилберт, а именно препоръката да се изключи смисълът на твърденията и да се работи само с техните записи (т.е. с техните «форми»), се нарича ХИЛБЕРТОВ ФОРМАЛИЗЪМ.

По-нататък: Вземаме аксиомите на някаква теория, това са някакви знакосъчетания. Вземаме и описание на правилата за извод, т.е. правилата, по които от едни знакосъчетания се получават други. (Тогава се казва, че теорията е представена като ФОРМАЛНА СИСТЕМА.) Ако сме подбрали добре аксиомите и правилата, бихме могли да докажем, че в така получената система с помощта на правилата не може да се получи някакво знакосъчетание заедно с отрицание на знакосъчетанието. Това ще означава — след като отново се върнем към смисъла на знакосъчетанията, — че теорията е непротиворечива. Ето така би могло да се получи доказателство на непротиворечивостта за някоя аксиоматична теория на множествата, в което никъде не се дискутират съмнителните въпроси, свързани с трудното понятие за истинност в тази теория.

В програмата на Хилберт има и някои други моменти. В частност Хилберт е имал съображения, които са го карали да се надява, че с помощта на току-що описания метод може да се изясни и статусът на чистите теореми за съществуване.

Имало е голяма надежда всичко това да бъде осъществено. Поради извършеното от Фреге, Пеано, Уайтхед и Ръсел, Цермело и редица други, а също и от самия Хилберт, представянето на по-важните математически теории като формални системи не било трудна работа. Учениците на Хилберт се заели активно с осъществяването на програмата. Работата тръгнала наред, доказани били някои теореми за непротиворечивост — не за цялата математика, а за части от математиката, но на първо време така и следвало да се очаква. Хилберт бил ентусиазиран, непрекъснато правел победоносни констатации и оптимистични прогнози. Има статии, в които той предлага конкретни, макар и малко неуточнени пътища за решаване на задачата в общия ѝ вид. Окончателното ѝ решаване изглеждало само въпрос на техника и време.

И ето, да се върнем отново на конференцията в Кьонигсберг през септември 1930 г. На тази среща е било говорено, разбира се, и за програмата на Хилберт. Там е присъствувал и един младеж, току-що (през февруари 1930 г.) завършил Виенския университет. Защо е присъствувал? — Защото много добре се проявил като студент. В последния курс на университета в докторската си теза* бил доказал, че логическите закони, които употребявала школата на Хилберт, са достатъчни за целта и че няма нужда от издирване на други логически закони. Наричал се Курт Гьодел (1906—1978). Заради този свой резултат той бил поканен да изнесе кратко съобщение на сбирката, което и сторил на 6 септември.

Обаче в Кьонигсберг Гьодел бил дошъл с още едно откритие. През лятото, след като завършил университета, продължил да се занимава с логически въпроси. Опитал се да докаже непротиворечивостта ако не на цялата математика, то поне на един важен неин раздел — математическия анализ. И докато се опитвал да докаже това, разбрал следното: въобще не е възможно да бъде реализирана програмата на Хилберт! Грубо казано, той разбрал, че всяка непротиворечива формална система, включваща в себе си няколко основни математически факти, съдържа и твърдения, които са верни (ако имаме предвид техния смисъл), но неизводими в системата. Следователно математиката не може да се представи като формална система *(първа теорема за непълнота).*

За дискусията в Кьонигсберг има писмен отчет. Водени са стенографски бележки, по-късно са издадени в редактиран вид. Гьодел се е изказал предпоследен. От публикацията не личи да са възникнали незабавно оживени многогласни разисквания. Обаче един от слушателите много добре разбрал какво е станало и както е известно от други източници, проявил много силен интерес. Това е Джон фон

* Според нашата терминология — дипломна работа.

Нойман (1903—1957), който е бил ученик на Хилберт, занимавал се е с доказателства за непротиворечивост и е имал някои частични успехи. Той веднага разбрал значението на откритието и говорил активно с Гьодел. В резултат на неговите въпроси теоремата още тогава била подобрена. Работата на Гьодел (и на фон Нойман) в това направление продължила и през следващите месеци, когато той (и малко след него фон Нойман) получава още един резултат, който грубо може да се изкаже така: не е възможно непротиворечивостта на достатъчно богата формална система да се докаже с помощта на методите (т е. понятията, аксиомите и правилата за извод) на самата тази система. Този резултат е известен под името *втора теорема за непълнота.*

За да се докажат тези теореми в достатъчно общ вид, е било необходимо да се даде математическо определение на понятието «формална система». В предишната сказка вече говорихме, че това е стимулирало създаването на математическата дефиниция на понятието «алгоритъм». С помощта на това понятие понятието формална система се уточнява така:

Иска се да има алгоритъм, с помощта на който за всяко знакосъчетание може да се разпознае дали то е аксиома, или не.

Всяко правило за извод се отнася за краен брой обекти, т.е. с негова помощ се получава следствие от краен брой предпоставки.

За всяко правило за извод има алгоритъм, с помощта на който може да се разпознае дали от дадени предпоставки чрез даденото правило може да се получи като следствие дадено знакосъчетание.

При това уточнение първата теорема за непълнота гласи: Ако тази част на аритметиката на естествените числа, в която става дума за събиране и умножение, се включва в дадена формална система T и ако T не е противоречива, то в нея може да се посочи вярно твърдение G, което нито може да се докаже, нито да се опровергае.

Ще дадем идея за метода, с помощта на който се установява теоремата за непълнота. Първо, доказва се, че всички формули в дадена формална система T могат да бъдат подредени в редица; да я означим с

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

По този начин всяка формула си има поне един номер. На всяко естествено число отговаря някаква формула; бихме могли да смятаме, че числото е специален начин за записване (т.е. шифър) на формулата.

Ако T включва аритметиката, то естествените числа са обекти на T (в теорията T може да има и други обекти, но това не е съществено). Ако една формула на T изразява зависимост между естествени числа, то тази формула поражда зависимост и между формулите на T, стига тези числа да трактуваме като шифри на съответните формули.

Нека x е някаква променлива. Доказва се, че ако в T са изводими няколко основни закона от събирането и умножението на естествените числа (тук няма да изброяваме кои) и ако T е непротиворечива, то има формула $U(x)$ на T със свойството: Ако n е естествено число и n е шифърът на формулата $F(x)$ то:

А) Ако $F(n)$ е изводимо в T, то отрицанието на $U(x)$ е изводимо в T.

Б) Ако отрицанието на $F(n)$ е изводимо в T, то $U(n)$ е изводимо в T.

Да допуснем сега, че в T не може да се изведе противоречие. Ще означим с g някой от номерата на $U(x)$, т.е. имаме $U(x) = \varphi_g$. Ще докажем, че в T не може да се изведе нито $U(g)$, нито отрицанието на $U(g)$. Наистина поради А) от изводимостта на $U(g)$, тъй като g е шифър на $U(x)$, следва изводимостта на отрицанието на $U(g)$. Поради Б) от изводимостта на отрицанието на $U(g)$ следва изводимостта на $U(g)$. Следователно получаваме, че

$U(g)$ Е ИЗВОДИМО В T ТОЧНО ТОГАВА, КОГАТО ОТРИЦАНИЕТО НА $U(g)$ Е ИЗВОДИМО В T .

Следователно, ако допуснем, че $U(g)$ е изводимо в T, ще излезе, че T е противоречива. Ако допуснем, че отрицанието на $U(g)$ е изводимо в T, то теорията T отново се оказва противоречива. Тогава в T не е изводимо нито $U(g)$, нито неговото отрицание. Освен това $U(x)$ може да се подбере така, че за всяко естествено число n от верността на $U(n)$ да следва, че $U(n)$ е изводимо в T. В такъв случай, понеже $U(g)$ не е изводимо, то не е и вярно. Следователно отрицанието на $U(g)$ е вярно. И така, посочихме вярно твърдение, което не е изводимо в T. С това доказателството е завършено.

Да обърнем внимание, че допълването на формалната система T с нови аксиоми и правила за извод не спасява положението, стига да си останат в сила изискванията 1), 2) и 3). Например, ако в качеството на нова аксиома добавим твърдението G (за което ставаше дума в теоремата за непълнотата), то ще бъде изводимо в новата формална система, обаче сега ще може да се посочи ново твърдение G, което не може нито да се докаже, нито да се опровергае и т.н.

Че работата с формалните системи ще се провали, това го е разбирал десетина години преди Гьодел също и Емил Пост, за когото говорихме в предишната сказка. Той е употребявал други термини, но има негови записки, от които се вижда, че е смятал дълбоко погрешна представата, съгласно която математическото творчество може да бъде описано посредством формални системи. От едно писмо на Цермело до Гьодел от 1931г. се вижда, че и първият създател на практически използваема формална система за теорията на множествата също се е отнасял отрицателно (ако не и с отвращение) към идеята, че посредством формалните системи може да се дадат правилни описания на математическите теории**.** «... грешката се дължи на (извънредно погрешното) предположение — пише Цермело, — че всяко математически дефинируемо понятие е изразимо с крайна комбинация от символи ..., което аз наричам «финитистки предразсъдък». Реално погледнато, положението е съвсем друго и само след като този предразсъдък бъде преодолян (задача, на която гледам като на свое особено задължение), ще стане възможна една приемлива метаматематика.» (Под «метаматематика» тук се разбира теория за логическите явления в математиката, математическа логика.)

Да обърнем, специално внимание на една особеност в първата теорема за непълнота. Твърдението *G*, за което ставаше дума там, Е ВЯРНО, макар и недоказуемо в *T*. Излиза, че колкото и мощна формална система да създадем, ако тя е непротиворечива, в нея: не могат да се докажат всички верни твърдения. С други думи, в нея не могат да бъдат описани всички средства, с които човек стига до констатация за истина. И като имаме предвид току-що цитирания пасаж от Цермело, излиза, че понятията за безкрайност и за истина са свързани помежду си. Изобщо теоремите за непълнота поставят въпроса за връзката между истина и доказателство. В архива на Гьодел е запазена чернова на писмо (от май 1970г.), в което той се опитва да обясни защо неговите съвременници около 1930г. са били някак си далеч от теоремата за непълнота: «. . .като следствие от предразсъдъците на нашето време: . . .понятието за обективна математическа истина като противопоставено на доказуемостта беше разглеждано с най-голямо подозрение и решително отхвърляно като безсмислено.» Впрочем точно този пасаж е зачеркнат в черновата, но той съдържа голяма доза истина. След малко отново ще се върнем към него.

По-нататък. Щом като математиката — една съвсем точна наука (страх ме е да кажа «най-точната»; за да не прозвучи шовинистично), борави ПО СЪЩЕСТВО с толкова неуловимо понятие за истина, какви надежди за фиксиране, на истината трябва да свързваме с някои други- науки, например с такива, за които се смята, че навлизането в тях на математическите методи трябва да бъде приветствувано?

Няколко думи относно програмата за доказване на непротиворечивост. Веднага след съобщението на Гьодел започва търсене на други подходи, които по възможност да са близки до формализма на Хилберт, с минимално допускане на безкрайността. Такова изискване не е безсмислено, защото, както вече казахме в началото още Кантор е дал класификация на различните видове безкрайности: за математика понятието за безкрайност не е нещо аморфно. Днес има някои такива доказателства, има и подходи, за които тук нищо не сме споменали и които все още като че ли не са дали големи резултати, но не са и изчерпани.

Най-сетне последен коментар и за «големия предразсъдък» от времето на 30-те години — формализма на Хилберт. Не напразно Гьодел е зачеркнал в черновата си думите, които биха могли да се изтълкуват като нападка срещу «предразсъдъка» (макар че за зачеркването могат да се предположат и други причини). Понятието «формална система» не е подбрано случайно, то е тясно свързано с важен дял на нашата умствена дейност и теоремите за непълнота показват, че този дял не изчерпва всичко. Обаче това «неизчерпване» е само «в известен смисъл», тъй като на практика всички по-важни дялове на математиката са представени като формални системи. Впрочем това представяне винаги става някак си post factum, след като теорията вече е била развита другояче. Освен това, когато се окаже, че някоя формална система не е достатъчна за доказване на важно твърдение, това твърдение винаги може да се добави към аксиомите. Следва да прибавим и още нещо — обикновено математиците чувствуват една теория като пределно точна (като «строга») едва когато тя е представена или лесно може да се представи във вид на формална система. Доказателствата във формална система са някак си «максимално осезаеми».

Теоремите за непълнота пораждат дискусии и днес. Известни са множество техни варианти и голям брой коментари. Така например петнадесетина години след откритието на Гьодел постиженията на електрониката дадоха възможност за конструиране на машини, имитиращи умствената дейност на човека. Днес виждаме едно бързо движение напред в конструирането на такива машини и е напълно ясно, че процесът на тяхното усъвършенстване е още в началото си. Обаче всеки «разумен автомат» е устройство с крайно много елементи, всеки елемент може да пребивава в крайно много състояния, правилата за преминаване от едни състояния в други са ясно очертани — с една дума, работата на «разумната машина» силно прилича на правене на изводи във формална система. Какви ограничения поставят теоремите за непълнота пред бъдещето на такива машини?

Джордж БУЛОС

НОВО ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ТЕОРЕМАТА НА ГЬОДЕЛ ЗА НЕПЪЛНОТА*

Много теореми имат по много доказателства. След като беше дал първото строго доказателство на фундаменталната теорема на алгебрата (ФТА), Гаус даде още три; оттогава бяха открити още няколко други. Питагоровата теорема — по-стара и по-лека от ФТА — притежава днес стотици доказателства. Дали изобщо съществува велика теорема с едно-единствено доказателство?

Ще дадем едно ново и лесно доказателство** на Гьоделовата теорема за непълнота в следната форма: *Не съществува алгоритъм, който да поражда всички верни аритметични твърдения и нито едно невярно.* По характера си доказателството ни е твърде различно от обичайните доказателства и предполага само повърхностно познаване на формалната математическа логика. То е напълно завършено с изключение на един технически факт, чието доказателство само ще скицираме.

Нашето доказателство използва *парадокса на Бери*. В редица свои работи Бертран Ръсел приписва на Дж. Дж. Бери (G. G. Berry 1867–1928) — библиотекаря на Оксфордския университет, парадокса за *най-малкото число, което не е именуемо с помощта на по-малко от тридесет срички.**** Парадоксът, разбира се, произтича от това, че това число е току-що наименувано с помощта на 29 срички. За парадокса на Бери Ръсел казва веднъж: «Той има достойнството, че не излиза извън рамките на крайните числа».****

Преди да започнем, трябва да кажем няколко думи за алгоритмите, за «аритметичните твърдения» и за това, какво

* BOOLOS, G. 1989. A new proof of the Gödel incompleteness theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 36, No. 4, pp. 386 – 388.
** С. Крипке ми съобщи, че е забелязал доказателство подобно na представяното, още някъде в началото на 60-те години.
*** В оригинала «19 срички» — *Бел. прев.*
**** RUSSEL, B. On "Insolubilia" and their solutions by symbolic logic. *In:* D. Lackey & G. Braziller, eds. *Essays in Analysis*. N.ew York, 1973, p. 210.

означават понятията «вярно» и «невярно». Да започнем с «твърденията на аритметиката».

Езикът на аритметиката съдържа знаците за умножение × и за събиране +, името 0 за нулата и знака s за операцията наследник (плюс едно). Той съдържа също така знака за равенство = и обичайните логически символи $\neg$ (не), $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\rightarrow$ (ако. . . , то. . .), $\leftrightarrow$ (тогава и само тогава, когато), $\forall$(за всички), $\exists$(за някои) и скобите. Променливите на аритметичния език са изразите x, x', x'', . . . , построени от символите x и '. Предполага се, че стойностите им са естествените числа $(0,1,2,\ldots)$. Ще съкращаваме променливите до една буква: y, z и т.н.

Днес можем да кажем, че разбираме достатъчно добре какво е истина и лъжа в аритметичния език. Така например $\forall x \exists y\ (x=sy)$ е *невярно* твърдение, защото не всяко естествено число е наследник на някое естествено число (нулата е контрапример — тя не е наследник на *естествено* число). От друга страна, $\forall x \exists y (x = (y + y) \vee x = s(y + y)$ е вярно твърдение: за всяко естествено число x има такова естествено число y, че или $x = 2y$, или $x=2y+1$. Вижда се също така, че в аритметичния език могат да се изразят много понятия, например «по-малко от» $(x < y)$ може да се дефинира като $\exists z(sz + x = y)$ (за някое естествено число z наследникът на z плюс x е равно на y). А сега да видим, че $\forall x \forall y\ [ss0 \times (x \times x) = (y \times y) \rightarrow x = 0]$ е . . . — хайде, проверете сами дали това е вярно, или не. (Упътване: $\sqrt{2}$ е ирационално.)

За нашите цели не е необходимо да бъдем по-формални по отношение на синтаксиса и на семантиката на аритметичния език.

Под *алгоритъм* разбираме изчислителна (автоматична, ефективна, механична) процедура или предписание от обичайния вид, например програма на някой от компютърните езици като Си, Бейсик, ЛИСП, . . . , или машина на Тюринг, или регистрова машина, или алгоритъм на Марков, . . . , формална система като аритметиката на Пеано или аритметиката на Робинсън, . . . каквото и да е. Приемаме, че алгоритъмът поражда *данни на изхода,* т. е. множеството от нещата, които той «печата» в процеса на изчислението. (Разбира се, един алгоритъм може да има и празен, *нулев* изход.) Ако алгоритъмът е формална система, то данните на изхода са тъкмо твърденията, доказуеми в системата.

Въпреки че аритметичният език съдържа само символите на операциите s, +, $\times$, оказва се, че много математически твърдения могат да се преформулират като твърдения от аритметичния език, включително и такива знаменити недоказани още твърдения, като последната теорема на Ферма*, хипотезата на Голдбах, хипотезата на Риман и широко споделяното днес мнение, че $P \neq NP$. По такъв начин, ако имаше алгоритъм, който да печата всичките верни аритметични твърдения и само тях — за какъвто алгоритъм теоремата на Гьодел ни казва, че не съществува, — ние бихме имали начин да установим дали всяко от тези все още недоказани твърдения е вярно, или не и всъщност да проверяваме дали произволно твърдение, което може да се формулира като аритметично твърдение S, е вярно: стартирай алгоритъма и просто чакай да видиш кое от двете: S или ¬ S, ще бъде отпечатано (алгоритъмът трябва рано или късно да отпечата едното от двете, ако отпечатва всички истини и нито една неистина, защото точно едно от двете е вярно: S или ¬ S). За щастие няма защо да се тревожим, че такъв алгоритъм може да ни накара да чакаме прекалено дълго, преди да ни предостави отговор на интересуващия ни въпрос, защото, както ей сега ще покажем, никакъв алгоритъм не може да върши горната работа, дори и да е безкрайно бавен.

За да докажем, че не съществува алгоритъм, чиито данни на изхода да съдържат всички верни и нито едно невярно аритметично твърдение, допускаме, че M е алгоритъм, който не поражда нито едно неистинно аритметично твърдение, и ще покажем как да построим едно вярно твърдение на аритметиката, което не ще се появи на изхода на M (с това ще докажем и теоремата).

Нека за естественото число n изразът $[n]$ се състои от 0, предшествувана от n символа за наследник s. Например [3] е sss0. Забележете, че изразът $[n]$ играе ролята на числото n.

Ще ни трябва и още една дефиниция: Ще казваме, че една. формула $F(x)$ *именува* числото n ако следното твърдение се появява на изхода на M: $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [n])$. (Обърнете внимание върху това, че дефиницията на «имената» се позовава на алгоритъма M.) Така например, ако $\forall x(x+x=ssss0 \leftrightarrow x=ss0)$ се поражда от M, то формулата $x + x = [4]$ именува 2.

Нито една формула не може да именува две различни числа, защото, ако и $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [n])$ и $\forall x(F(x) \leftrightarrow x = [p])$са верни, то ще бъде вярно и $\forall x(x = [n] \leftrightarrow x = [p])$, и $[n] = [p]$, и следователно n трябва да е равно на p. Нещо повече, за всяко число i има само краен брой различни

* Междувременно доказана от Андрю Уайлс през 1994г.

формули, които съдържат i символа (тъй като в аритметичния език има 16 изходни символа, ще има не повече от 16^i формули от по i символа). Така за всяко m има краен брой (всъщност $\leq 16^{m-1} + \ldots + 16^0$) числа, именувани от формули, съдържащи по-малко от m символа; има поне едно число, което не се именува от нито една формула, съдържаща по-малко от m символа. Следователно съществува и най-малко число, което не се именува от формула с по-малко от m символа.

Нека $C(x, z)$ да бъде формула от аритметичния език, коя го да казва, че x е число, именувано от формула, съдържаща z символа. Техническият факт, за който стана дума в началото, че ще ни потрябва, е, че какъвто и алгоритъм M да вземем, ще се намери такава формула. По-нататък в коментара 3 ще скицираме построяването на C.

Нека сега $B(x,y)$ е формулата $\exists z(z < y \wedge C(x, z))$. $B(x,y)$ казва, че x се именува от някоя формула с по-малко от y символа. Нека $A(x,y)$ бъде формулата $\neg B(x,y) \wedge \forall a(a < x \rightarrow B(a,y))$. $A(x,y)$ казва, че x е най-малкото число, което не се именува от формула с по-малко от y символа.

Нека k е броят на символите в $A(x,y)$. $k > 3$.

И накрая нека $F(x)$ да е формулата $\exists y(y=([10] \times [k]) \wedge A(x,y))$. $F(x)$ казва, че x е най-малкото число, неименуемо от формула с по-малко от $10k$ символа.

Колко символа съдържа F? Е добре, $[10]$ съдържа 11 символа, $[k]$ – $k + 1$ символа, $A(x,y)$ – k символа, а има и още 12 други символа, тъй като y е x' и така общо $2k + 24$. Понеже $k > 3$, $2k + 24 < 10k$ и F съдържа строго по-малко от $10k$ символа.

Видяхме, че за всяко m съществува поне едно число, което не се именува от нито една формула с по-малко от m символа. Нека n е най-малкото такова число за $m=10k$.

Тогава n не се именува от $F(x)$; с други думи, $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=[n])$ не се поражда от M.

Но $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=[n])$ е вярно твърдение, тъй като n е най-малкото число, което не се именува от нито една формула, съдържаща по-малко от $10k$ символа! По такъв начин излиза, че сме намерили вярно твърдение, което не може да се породи от M, а именно $\forall x(F(x) \leftrightarrow x=[n])$. Което и трябваше да се докаже!

Някои коментари относно доказателството:

1. В нашето доказателство символите играят ролята на

«сричките» и също както «тридесет» съдържа $3 \ll 30$ срички, така и ([10[× [k]) съдържа $k + 15 \ll 10k$ символа.

2. В мемоара си за Курт Гьодел [Kreisel, G. Kurt Göde1, 28 April 1906 — 14 January 1978. — Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 26, 1980, p. 150.] Георг Крайзел съобщава, че Гьодел приписвал успеха си не толкова на математическа изобретателност, колкото на вниманието си към философските нюанси. Гр. Чейтин (Gregory Chaitin) веднъж отбеляза, че едно от неговите собствени доказателства на теоремата за непълнота наподобява повече парадокса на Бери, отколкото Епименидовия парадокс на лъжеца («Това, което казвам сега, не е истина»).* Доказателството на Чейтин използва понятието *сложност* на естествено число, т. е. най-малкия брой инструкции в машинната таблица на коя да е Тюрингова машина, която отпечатва това число, а също така известен брой теоретико-информационни понятия. Нито едно от тези понятия не се появява в нашето доказателство, което бе вдъхновено от бележките на Крайзел и Чейтин, четени от автора примерно по едно и също време.

3. Нека сега да скицираме построяването на формулата $C(x, z)$, която да казва, че x е число, именувано от формула, съдържаща z символа. Основната идея е, че алгоритми като M могат да се разглеждат като опериращи с «изрази», т.е. с крайни редици от символи; че подобно на ASCII кодовете на символите могат да се съпоставят кодиращи числа (логиците често наричат тези кодиращи числа *Гьоделови номера);* че някои теоретико-числови трикове позволяват изразите да се кодират като числа, а операциите върху изразите — като операции върху числата, кодиращи съответните изрази; че всички тези числови операции могат да се дефинират чрез събиране, умножение и логически понятия. Обсъждането на символи, изрази (крайни редици от изрази и т.н.) може следователно да се кодира в аритметичния език като обсъждане на естествените числа, които ги кодират. За да се построи формула, която да казва, че n е именувано от някоя формула с i символа, трябва да се напише формула, която изразява обстоятелството, че съществува редица от операции на алгоритъма M (опериращ върху изрази), която редица генерира

* За изложение на Чейтиновото доказателство ма теоремата за непълнота вж. DAVIS, M. What is a computation? *In*: L. A. STEEN, ed. *Mathematics today: Twelve Informal Essays*. New York, 1980, pp. 241 — 267; pp. 263—267 (бълг. превод: *Математиката днес: Дванадесет есета*. София: Наука и изкуство, 1984, с. 262—289; с. 287—288).

израза, съдържащ ∀, x, (, последователно i-те символа на някаква аритметична формула $F(x)$, $\leftrightarrow$, x, =, n последователни символа s, 0 и). Гьоделовото номериране и трикове от теорията на числата ни позволяват да говорим по този начин за символи, редици от символи и за операциите на M, като ги кодираме чрез аритметични формули.

4. И нашето доказателство, и стандартното доказателство употребяват Гьоделови номерации. Нещо повече, и при нас, и при стандартното доказателство недоказуемите истини могат да се получат чрез субституция на името на някакво число в определена (и решаваща) формула. Съществува обаче едно важно различие между двете доказателства. В обичайното доказателство числото, чието име се замества, е кодът на формулата, в която то се замества, докато при нас то е единственото число, за което формулата е вярна. По силата на тази разлика изглежда обосновано да се твърди, че за разлика от стандартното доказателство при нас не се използва *диагонализация.*

Георги ГАРГОВ

гьодел, ешер, бах —
метамагически спекулации

Мауриц ЕШЕР

пътища към безкрая
(превод от английски с. паси)

Георги Гаргов

ГЬОДЕЛ, ЕШЕР, БАХ – МЕТАМАГИЧЕСКИ СПЕКУЛАЦИИ

(две сказки за безкрайността и за езика)

Заглавието на сказките е комбинация от заглавията на двете знаменити книги на Дъглас Хофстадер (Douglas Hofstadter) — «Гьодел, Ешер, Бах — вечната златна нишка» и «Метамагически теми», станали нещо като символ на цяла епоха в популяризацията на науката. Трудна задача е сказките да съответстват на духа на книгите, с които младият американски информатик постави началото на един нов жанр в литературата, защото е наистина недостатъчно те да се характеризират като чисто научнопопулярни — първо, заради техния обем, второ (и най-вече), заради тяхното съдържание. Особено «Гьодел, Ешер, Бах — вечната златна нишка» — тя съдържа огромен материал, който се отнася към няколко области на знанието — не само към логиката, но и към информатиката и към музиката. В тази книга има и най-различни други неща, за които при това е разказано, без да се нарушава т.нар. научна строгост. Разказваното от Хофстадер е практически безупречно от научна гледна точка, макар някои от неговите критици да му намериха кусури тук и там.

Книгите са насочени към широките читателски кръгове, а не само към научните работници. Те са предназначени за всеки, комуто не е чужда любознателността, но на когото, общо взето, липсва специална подготовка. Разбира се, да се пишат подобни книги е невероятно сложна задача. Резултатът, постигнат в двете книги (и особено в първата), е невъзможно да бъде преразказан — най-добре е човек да ги прочете сам. Преводът на «Гьодел, Ешер, Бах» според мен е също непостижима работа. Изобщо мисля, че превод на друг език не е възможен, макар да съществува превод на френски и да се готви превод на руски. Такива преводи представляват по същество нови книги, написани «по мотиви» от книгата на Хофстадер.* А тя ми се струва най-ценна с това, че в нея се прокарва една особено важна идея — идеята, че в историята на човешката цивилизация разделението

* И все пак професионалното предизвикателство към родните преводачи си остава.

между наука и изкуство, което се възприема така болезнено от някои (например от Чарлз П. Сноу (Charles Percy Snow), който посвети на взаимоотношенията на «хуманитарното» и «научното» блестящото си есе «Двете култури»), всъщност е привидно.

Най-важните, най-основните идеи в човешкото познание винаги са получавали въплъщение както в науката, така и в изкуството. В подобен дух ще се опитам най-напред да проследя съдбата на една добре известна идея, понятие, или ако щете, просто тема за салонни разговори.

БЕЗКРАЙНОСТТА

Тази сказка е посветена на безкрайността и на някои от разклонените следствия на тази идея. Ще се постарая да дам и илюстрации. Очевидно е от самото начало, че за такава древна идея с хилядолетна история, върху която са писали мнозина от най-големите умове, например Аристотел, Лайбниц, Кант — а преди да пишат естествено са и размишлявали, — е абсолютна самонадеяност човек да си мисли, че ще успее да каже нещо, което не е било казвано преди него в една или друга форма, и то многократно. Аз нямам подобни претенции — ще се опитам по-скоро в духа на заглавието да споделя с читателя няколко спекулации по повод на безкрайността.

Бих започнал с легналата осморка ∞ — символа на безкрайността, за който не успях да установя напълно достоверно от къде точно идва, макар някои източници да посочват за негов автор английския математик Уолис (John Wallis) и даже датират първата употреба — 1655г.* Този знак става широко разпространен през XVIII в. И както не е известен произходът на този символ, така и във всекидневните разговори, когато става дума за безкрайност, едва ли имаме ясна представа за какво точно говорим. Във всеки случай обикновеният гражданин, когато употребява тази дума, има нещо наум (за да употреби все пак думата), но едва ли то е отчетлива идея. Ако се водим от езиковия смисъл, безкрайното се схваща като нещо, което няма край. Възможно е също така под безкрайно да се подразбира просто нещо много, много голямо — толкова голямо, че опитът да достигнем неговите граници да бъде съпроводен с непреодолими трудности и винаги да бъде обречен на неуспех.

Такава представа може да се характеризира като идея, свързана

* Предполага се, че Уолис е използвал стилизиран римски символ, означаващ числото 1000 — ∞ е говорел за неограничено нарастване на някаква редица.

с количествената страна на явленията: количествена безкрайност. Другата страна на нещата е качествената. И безкрайността има своята качествена страна — за нея ще стане дума по-нататък. По повод на количествения аспект на безкрайността може да се каже следното: той е свързан с числата и множествата от ясно различими обекти.

В историята още не е датирана особено точно появата на естествените числа. Както казват, някъде на границата между палеолита и неолита възниква като разпространена практика операцията «броене», а оттам и първите употреби на числата. В книгите по история на математиката срещаме нерядко разкази за древния скотовъдец и стадото му — извеждайки стадото на паша, той искал да бъде сигурен, че когато се върне, няма да е загубил нито едно животно. Трябвало е по някакъв начин да се установи равенство между двете количества — стадото преди и след пашата. Разбира се, ако овцете или говедата били до 5—6 на брой, сравняването ставало мигновено или «с един поглед», с който първобитният овчар е можел да обхване тази съвкупност. Но ако животните били повече, налагало се да използва някаква, макар и най-примитивна технология.*

Както твърдят историците на науките и занаятите, тази технология, изглежда, е била свързана с езика — тогава също модерно «изобретение». Възможно е понякога с всяка овца от стадото скотовъдецът да е свързвал по една дума от все още «новия» език, които думи си повтарял като стихотворение надвечер, когато прибирал стадото. Ако можел да изкара това стихотворение докрай, всичко е било наред. Ако пък му оставали свободни думи — ставало ясно, че някои животни ги няма. Какво се било случило с липсващите овце — това, разбира се, било «предмет на допълнително изследване».

Някъде оттам води началото си практиката на броенето. Вместо на думи изброяваните обекти биха могли да бъдат съпоставяни и на пръсти (своите — и на ръцете, и на краката, на жената, на съседа и т.н.) или пък на други (не толкова стандартни) предмети. Достатъчно е предметите да са ясно различими и да са достъпни без затруднения винаги когато потрябват. Така броенето е вид «привързване», «закотвяне» на едни обекти към други — стандартни обекти. Последните играят ролята на имена — или ако искате «табелки», «идентификатори» — на преброяваните обекти.

* Историята с броенето на овцете е твърде подходяща за всевъзможни обяснения и затова е подозрителна. От усилената употреба тя се е превърнала в удобен мит. .Моля читателят да не я схваща особено сериозно.

Изглежда са минали много векове, докато изкристализират от тази дейност естествените числа като понятие, освободено от конкретната определеност на редиците

1 овца, 2 овце, 3 овце, 4 овце, . . . , или

1 крава, 2 крави, 3 крави, 4 крави, . . . и т.н.

и се появи чисто абстрактното понятие — редицата

1, 2, 3, 4, . . . ;

тук многоточието или фразата, «и тъй нататък», която също се среща, показва нещо извънредно важно — откритието, че тази редица няма край.

Колкото и далеч да се придвижим по редицата на естествените числа, колкото и много неща да имаме да преброим, винаги настъпва момент, когато нещата за преброяване свършват, докато ние имаме възможност да преброим още неща — в състояние сме да направим още една стъпка в редицата на числата. Според мен във времето на това епохално откритие трябва да се търсят и наченките на идеята за безкрайността. Процесът на броене е може би първият пример на явление, на някаква дейност, която по принцип няма граници, може да се продължава неограничено. Разбира се, с развитието на цивилизацията са се усложнявали нещата, които хората са могли да правят с числата; множали са се дейностите, свързани с употребата на количествени характеристики на действителността, и естествено са възниквали и други процеси, притежаващи същото свойство — да са принципно неограничени и незавършващи, за които не виждаме някакви граници при тяхното продължаване.

Тук трябва да се спомене следното много важно обстоятелство, което е направило на древните мислители огромно впечатление. Древните гърци — хора, освен всичко друго притежаващи и много свободно време, са се замисляли над такива на пръв поглед тривиални неща като въпроса, дали съществува най-голямо число, т.е. дали има предел процесът на броене (не ми се вярва например финикийци или жители на Вавилон — все хора, заети с бурна практическа дейност — да са се спирали върху подобни проблеми — тях са ги вълнували съвсем други грижи, също свързани с броенето).

Е добре: има ли най-голямо число? Явно най-голямо число няма, защото каквото и голямо число N да ни бъде представено, в следващия момент можем да направим още една стъпка в процеса на броене и да получим числото $N + 1$, непосредствена следващото естествено число. От друга страна, имаме общото понятие за естествено число. Ясно е какво се разбира под естествено число (тук просто цитирам гърците, днес може би тази яснота не е толкова очевидна). И така, ясно е какво е естествена число и тогава можем да си мислим за понятието изобщо, т.е. за всички естествени числа. Тази съвкупност, тази тоталност от някакви неща (от числа) очевидно ще бъде нещо, което е безкрайно далеч от всяко конкретно число, от всяко количество, което се измерва с естествени числа. Колкото и да прибавяме единици, колкото и стъпки да правим, пак ще се намираме (безкрайно) далеч от тази, така да се каже, отвъдна реалност. Каквито и количества да събирате: песъчинките по плажа, песъчинките на всички земни плажове, . . . — всичко това е нищо в сравнение с огромността на всичките естествени числа.

Подобна идея наистина е в състояние да разтревожи духа на човек, особено духа на мислител, изследващ отвлечени теми. А тук ни чака и въпросът, доколко имаме право да се отвличаме от реалностите и да си представяме такива неща като съвкупността от всички естествени числа. Самите гърци са поставяли въпроса така — става дума за законността, за рационалността на идеята за безкрайността: Възможно ли е в природата да съществуват неща (предмети, явления, процеси), които да можем да характеризираме обосновано, по необходимост като безкрайни?

Ето един такъв пример — можем да приемем, че множеството на всички естествени числа е нещо, което и съществува, и е безкрайно, — но тогава ще трябва да се примирим с редица озадачаващи свойства на подобен обект. Никакви количествени изменения вътре в този обект не го променят, той не се влияе от крайните въздействия, които могат да му се окажат. Изглежда, именно по онова време възниква знаменитият HORROR INFINITY (ужас от безкрайното). Макар и да предполагам, че гърците са разговаряли на гръцки, а не на латински, изразът все пак е стигнал до нас именно на латински. Ужасът на безкрайността е бил схващан от гърците като невъзможност да се осмислят чертите на безкрайните обекти. Така според тях, ако към редицата 1, 2, 3, . . . , *N*, . . . се добави н полегналата осморка ∞ (като символ на завършената безкрайна съвкупност), то ни очакват ужасни неща. Тези тревоги са се конкретизирали в едни знаменити разсъждения (като казвам «тези», имам предвид не само това, а и много други неща, свързани с понятието безкрайност). Тук не става дума само за безкрайността на конкретен процес (процеса на броене), макар и много важен в човешката практика — гърците са се интересували и от други такива, характерни за културата им въпроси: безкрайността на времето, безкрайността на пространството, безкрайната делимост на нещата.

Последният въпрос се състои в това, дали ако разделим (макар и само мислено) даден предмет, тяло или явление на няколко части, ще получим винаги предмети или явления, които могат също да се подложат на подобна процедура, т.е. дали могат да се разделят на части, запазващи своята индивидуалност. Може ли такъв процес да се продължава неограничено дълго, също като другите, за които вече стана дума? Някои хора са смятали тогава, че може, други — че не е възможно. Бихме могли да разделим мислителите (макар и грубо) на две групи според мненията им по въпроса: привърженици на безкрайната делимост и представители на атомизма — подхода, при който се приема, че природата се състои в края на краищата от някакви най-малки, неделими частици.

Някъде малко преди времето на Аристотел размислите върху проблемите на неограниченото и безкрайното стигат до един наистина критичен момент — момент, който можем да фиксираме исторически и да го свържем с конкретно име — Зенон. Това име несъмнено е добре известно и до ден-днешен. Разсъжденията на гръцкия философ логик (Ахил и костенурката, Стрела, Стадион, ...), наричани ту парадокси, ту антиномии, ту софизми, но най-вече апории, са били насочени както против възгледа за безкрайната делимост на пространството (една част от тях), така и против схващането за атомарността на пространството (друга част). Зенон свързва тази тема с движението.

Ако искаме да разсъждаваме логично и да останем рационални в рамките на едно спокойно и балансирано съзерцание, трябва да се откажем и от двете, казва ни Зенон. Да разгледаме съвсем накратко парадокса му за тяло, което се движи и изминава някакъв път, но преди да измине целия път, трябва да е изминало половината от този път, а преди да е стигнало до средата, трябва да е изминало и половината от половината, и т.н. Така, преди да установим окончателното събитие «тялото е стигнало до края на пътя си», трябва да установим друго събитие — «тялото е стигнало до средата на пътя си», а преди това — друго събитие: «тялото е стигнало до четвъртинката от пътя си», и т.н. Получаваме редица от събития, всяко от които се предшествува във времето от следващите го в редицата събития. Всички тези събития трябва да установим, за да можем да твърдим, че тялото наистина е изминало своя път, че изобщо е стигнало донякъде. Тази поредица много прилича на редицата от естествените числа (но като че ли обърната наопаки, «инвертирана») и това обстоятелство много трудно се преодолява чрез рационални аргументи — нещо, което се опитвал да направи Аристотел.

Може спокойно да се каже, че Аристотел е посветил много голяма част от своето творчество на анализа и критиката на аргументите на Зенон, на други подобни аргументи и всъщност на критика на самата идея за безкрайността. От Аристотел идва твърдението, лежащо в основата на възгледите на мнозина мислители след него:

«Безкрайността не може да съществува актуално.»

Според Аристотел не можем да си представим целия безкраен процес като едно завършено цяло — това би противоречало на дефиницията на «безкраен» като незавършен, незавършващ. За аристотелианската традиция е характерно допускането, че такива незавършващи поредици от СЪБИТИЯ (тук е важна думата събитие и затова я подчертавам като ключова за анализа на антиномиите) не подлежат на обединяване в нещо завършено! Това обстоятелство (събитийността) често се пренебрегва от съвременните изследователи на апориите. Така например парадоксът за Ахил и костенурката става наистина парадокс, ако подчертаем събитийността, че за да установим настигането на костенурката, ще трябва да установим преди това още безбройно много други събития.

За Аристотел актуалната безкрайност, т.е. завършената, съществуваща като едно цяло безкрайност, е невъзможна и даже противоречива като идея. Той твърди, че понятието ще ни върши работа само ако го схващаме динамично, т.е. само ако допускаме, че безкрайните неща съществуват винаги като крайни, но потенциално неограничени същности. С други думи, у древногръцкия философ настъпва раздвояване на идеята за безкрайност. Аристотел не допуска в своята система едната страна (актуалната безкрайност), а другата (потенциалната безкрайност) е за него единствената възможна форма на представите ни в тази област. Ако искаме да останем в добри отношения с логиката — настоява Аристотел — и изобщо, ако искаме да подходим рационално към тази проблематика, ще трябва да се откажем от актуално съществуващи същности, които са безгранични или безкрайни. В природата не съществуват подобни същности, характеризуеми като безкрайни в същинския смисъл на думата, така че представата за актуалната безкрайност не е подкрепена с нищо съществуващо. Тя е, според Аристотел, една празна представа —

изглежда, той е бил убеден, че представата за актуална безкрайност е логически противоречива.

Като казвам «представа за нещо, което го няма», искам да подчертая, че това е една много трудна представа — впрочем тя е навлизала в арсенала от познавателни средства на човечеството по лъкатушни пътища, съпроводена от много противоречия, макар днес да е станала доста привична в някои среди и по тази причина да изглежда понякога едва ли не тривиална (особено в трудовете на някои философи на XX в.). По този повод искам да напомня за една друга «тривиална» математическа идея — за числото 0. Добавянето на още един член — нулата — към редицата на естествените числа*

1, 2, 3, 4, 5, . . .

всъщност е огромно интелектуално постижение. Един от най-големите физици на нашия век — Шрьодингер — съвсем сериозно пише, че най-важното число в математиката и изобщо най-важното число измежду всички е нулата — като въплъщение на идеята за НИЩОТО.

Сега отново искам да обърна внимание върху това, че Аристотел е отхвърлял актуалната безкрайност до голяма степен поради един чисто психологически фактор (това е моя спекулация) — страха от много големите (или от много малките) неща, изобщо от неща, излизащи извън сферата на всекидневното. Нашето съзнание като че ли се стреми да елиминира такива предмети и явления — те са враждебни, крият някаква неопределена заплаха. Като чисто интелектуални идеи те също представляват «опасност», както показва например съдбата на идеята за безкрайността в различните религиозни системи.

Към безкрайността в религиите открай време съществува двойствено отношение — особено в монистичните религии. От една страна, тази категория е абсолютно необходима за разкриване на божественото — щем не щем, на божеството ще трябва да припишем свойства, които наподобяват свойствата на безкрайността — например характерните не само за християнската теология характеристики на Бога като всеблаг, всемогъщ, всезнаещ и т. н. Някои теолози определено свързвали безкрайното с божественото, други не по-малко категорично отхвърляли връзката им.

* В западноевропейската математика нулата е причислена окончателно към естествените числа от Л. Ойлер в книгата му *«Всеобща аритметика»*, 1768. Интересно е, че споменатият Уолис е твърдял, че «нулата не е число».

Така свети Августин с жар се нахвърля върху онези, които както се казва в «За града божий», глава 18, «се съмняват, че безкрайното може да бъде обхванато дори и от божественото провидение». Съществували са следователно хора, намиращи даже и всемогъщия Бог за безсилен пред загадките на безкрайното. Свети Августин, като се позовава на пасажи от свещените книги, настоява, че Бог има понятие и за безкрайното. Той казва, че «някои присъщи на Бога качества не се мерят с число», и оттук би трябвало да се убедим във вътрешната безкрайност на божественото или поне в безкрайността на някои негови проявления.

Каква е съдбата на идеята по-късно? В средните векове, макар и авторитетът на Аристотел да е много висок и казаното от него да се приема като истина от последна инстанция, все пак съществуват две течения — на аристотелианците и на онези, които приемали актуалната безкрайност за съществуваща (а какво можем да правим с нея е друг въпрос). Как средновековните схоласти атакували проблема?

Основното им средство е било Словото — словото и логиката, както са я разбирали тогава. Схоластите се надявали логически, т.е. с «добре построени аргументи», да потвърдят или да оборят мнението на Аристотел. В това отношение достигнали високо съвършенство. Днес е всепризнато, че са били много тънки мислители, но пък повечето техни постижения са били далеч изпреварили нуждите на епохата, не са били разбрани и са останали неупотребени и може би неупотребими още много векове след това.

Безкрайното става истинска научна проблема едва по време на първата революция в математиката (по-специално в математическия анализ), когато главно чрез усилията на хора като Нютон и Лайбниц е създаден новият математически апарат — тази нова математика се опира съществено върху безкрайното. В най-безобидния случай това е било понятие за потенциална безкрайност, но ми се струва, че ако не грешим против историческата истина, трябва да кажем, че тогава се е експлоатирало понятие, значително по-заредено с неприятни следствия от потенциалната, безкрайност, за която днес знаем, че е достатъчна база за построяването на анализа.

Както всеки съвременен студент по математика е чувал, този апарат се свежда по принцип към централното си понятие — ГРАНИЦА, когато дадена величина, менейки се, се приближава към една фиксирана стойност (границата) така, че разликата между двете величини става по-малка от всяко отнапред зададено, положително число.

В математиката на Новото време такива величини-процеси играят определяща роля. Но колкото тази математика дава на практиката, толкова остава длъжник на теорията, на логиката при своето обосноваване. Малко след епохата на Лайбниц и Нютон епископ Бъркли с право (по мое мнение) пише, че човек, който се ориентира в тънкостите на анализа и вярва в неговата обоснованост, е готов и за догмите на религията — в никакъв случай те не са «по-мътни» от основите на диференциалното и интегралното смятане. В изложението на Нютон и Лайбниц участват величини (т. нар. безкрайно малки и безкрайно големи величини или инфинитезимали), надарени с доста противоречиви свойства. Ако трябва да ги схващаме буквално, нарушаваме аристотеловата забрана на актуалната безкрайност. Но има и други — психологически — трудности.

Така безкрайно малкото е число, различно от нулата, но «по-малко от всяко определено положително количество», т.е. каквото и крайно количество да разгледаме, безкрайно малкото ще е по-малко от него, но не нула! За безкрайно голямото — същото, но в обратната посока — то е по-голямо от всяко крайно количество. Веднага личи, че разбирането на тези понятия е изпитание за въображението, макар и една коронована особа да казвала на Лайбниц, че имайки такива придворни около себе си, каквито били неговите, човек няма да е затруднен с понятието за безкрайно малко.

В математиката обаче нещата стояли доста сериозно. В ръцете на майсторите противоречивите инфинитезимали вършели чудесна работа, но в ръцете на учениците вече нерядко водели до абсурдни резултати. Задачата да се проумее «природата» на безкрайното в математиката през XVIII в. ставала все по-актуална. Тогава човек бил признаван за професионален «геометър», ако успявал да се оправи в многобройните тънкости на инфинитезималните величини, където в един момент делели на такава безкрайно малка (значи я признавали за неравна на 0), а в следващия миг я пренебрегвали (т.е. приравнявали я на 0). Тези сложности изисквали здрав ум и стабилна психика.

Тук е уместно да си спомним за случая с Галилей, който открил, че естествената редица на числата:

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, N. \ldots,$

има «същото количество елементи» както редицата от квадратите на естествените числа:

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, N^2, \ldots$

И двете редици са безкрайни и има точно съответствие между техните членове. За Галилей това било логически недопустимо — нарушавал се основният логически закон «ЧАСТТА Е ПО-МАЛКА ОТ ЦЯЛОТО». Затова великият италианец приел своето наблюдение за опровержение на съществуването на актуално безкрайни същности, свеждайки ги към «логически абсурд». В края на миналия век в математиката същото разсъждение се приемало вече за логически безупречно доказателство «за равномощността на множеството на естествените числа и множеството на квадратите на естествените числа».

И така, разсъжденията, свързани с безкрайността, са водили твърде често до противоречиви заключения. Противоречията са неприятни неща — особено за онези, които се занимават с «преследване на истината». А за логѝка, ценящ повече от всичко на света непротиворечивостта, последователността на своите построения, абсурдите на безкрайното са тежки удари на съдбата. Затова размислите над проблемите на тази категория би трябвало да са възможни само в определено състояние на духа: уравновесено, спокойно, отърсено от страстите на по-конкретните емоции, вглъбено и т. н.

Подобни идеи за «най-благоприятното познавателно състояние» намираме на места в литературата (Л. Н. Толстой, Р. Пърсиг и др.), а особено актуални в това отношение са източните учения като дзен-будизма, в които ударението се поставя върху постигането именно на такива състояния. Само тогава — настоява например дзен-будизмът — човекът ще е способен да схване онова, което иначе му се изплъзва, сливайки се с обективния свят.

На това място можем да се заемем и с Бах. Стигнали сме в историческото пътешествие до неговия XVIII в. и сега настава най-подходящият момент да говорим за неговата музика, въплъщаваща така ясно духа, за който ставаше дума. Мнозина от изследователите на неговото творчество, особено новата вълна от специалисти по Бах от нашия век (тук бих споменал най-напред името на Алберт Швайцер, а още и на Ернст Курт и др.), макар и да си противоречат в повечето от детайлите, са единодушни в едно: за тях Бах е олицетворение на обективното, на излизането извън сферата на личното, на сливането с обективния свят. В случая това е светът на музикалните идеи. Някои негови кратки пиеси за орган — прелюдии и фуги, създадени в периода на най-голям разцвет на творческите му сили (1730—1740), са ненадминати музикални съответствия на идеята за безкрайно движение и развитие, безкрайно спокойствие и вътрешна уравновесеност.

Ако се върнем към въпроса за това, какви качества са необходими на изследователя на безкрайното, ми се иска да спомена едно интересно наблюдение, направено през миналия век. Английският математик Джеймз Джозеф Силвестър (James Joseph Sylvester), известен в. математиката с трудовете си по алгебра, го споделя в една публична сказка през 1869 г. в отговор на друга сказка, изнесена малко преди това също от знаменитост, но вече в областта на биологията — Томас Хъксли (Thomas Henry Huxley). В сказката си Хъксли ругал съществуващата по онова време в Англия образователна система заради «прекалено многото изучаван материал, откъснат от нуждите на живота и обществото». Той се нахвърлял най-ожесточено и върху математиката като «наука, нямаща нищо общо с наблюдението и опита». А знаем колко се е ценял опитът във времената на Фарадей (Michael Faraday) и Дарвин (Charles Darwin)!

Силвестър се заел да отговори на Хъксли и да защити «честта на математиката». В един много изискан, «литературен» стил, с многобройни отклонения, вмъкнати цитати и исторически примери той оправдавал математиката, и то не само чрез нейната очевидна «полезност за общественото благосъстояние». Силвестър се спрял върху духовната роля на математическите занятия, той говорил за музиката и алгебрата — нарекъл музиката «алгебра на чувствата», а алгебрата — «музика на разума», но музиката сравнил със сън, а алгебрата — с бдение наяве, «макар и душата им да е една и съща».

В едно от отклоненията Силвестър изброил знаменити математици, живели дълго. Дълголетието той обяснявал с това, «че нямало друго учение ..., което да крие толкова много приятни, изненади за своите следовници ..., така да ги издига стъпка по стъпка към все по-висши състояния на интелекта». Тук ще приведа и един по-дълъг цитат от сказката на Силвестър, за да се получи представа и за стила на публичните сказки в Обединеното кралство през миналия век:

«Това обяснява необичайното дълголетие на великите майстори на аналитичното изкуство, старейшините на математическия Пантеон. Лайбниц (Gottfried Leibniz) живя до 70 години, Ойлер (Leonhard Euler) до 76, Лагранж (Joseph Louis Lagrange) — до 77, Гаус (Carl Friedrich Gauss) — също до 77, Платон, предполагаемият откривател на коничните сечения, който превърна математиката в свое удоволствие и я нарече «оръдие или помощник на философията» и «лекарство за душата» и за когото се казва, че не е оставял да мине ден, без да измисли някоя нова теорема, живя до 82 години, Нютон (Isaac Newton) — короната и славата на своята раса — до 85 години, Архимед (Archimedes), най-близък до Нютон по гений, бил на 75; и би могъл да доживее и до 100, ако не го бе съсякъл нетърпеливият войник, изпратен да го отведе пред римския пълководец, Питагор (Pythagoras) — в чиято школа възникна самото име математика (макар и в по-широк смисъл от съвременния), който беше втори баща на геометрията, предтеча на Коперниковата астрономия, откривател на правилните многостени и на музикалните канони, изобретател на несравнимата теорема, носеща неговото име, човек от самия връх на пирамидата на славата — ако може да се вярва на преданието, след като прекарал 22 години в Египет и 12 във Вавилон, открил на 57 години школа в Гърция, оженил се на 60 за млада жена и починал на 99 години, като продължил с неотслабваща енергия своите трудове до самата си кончина.»*

Впрочем Силвестър в своето изложение говори за математиката и като за «наука, която не се нуждае от наблюдения». Идеята за безкрайността е прекрасен пример за такава идея, която на пръв поглед не може да се потвърди или отхвърли на базата на наблюдения, каквито и да са те! В заобикалящия ни свят древните (пък и съвременните) скептици не откриват нищо, което да свидетелствува в полза на (или да опровергава) съществуването — на актуално безкрайни обекти. Древните са обръщали внимание на това, че всеки човек (всяка личност) е същество, което има и начало, и край, затова неговите наблюдения и целият му опит с нищо не допринасят за решаването на въпроса: Има ли в заобикалящия ни свят неща, които можем да характеризираме като безкрайни в един или друг смисъл.

Сред най-разпространените възгледи можем да срещнем и мнението за безкрайността на пространството, за безкрайността на времето (отразено в понятието ВЕЧНОСТ) и свързаните с това мнение твърдения, че заобикалящият ни свят е неунищожим, той съществува вечно и на всичкото отгоре е «без граници в пространството». В знаменитата древна поема «За природата на лещата» Лукреций Кар

*SYLVESTER, J.J. ([1869] 1956). The study that knows nothing of observation. — *In:* J.R. NEWMAN, ed. The Mathematical Way of Thinking. New York: Simon and Schuster, 1956, pp. 1758—1766.

(Titus Lucretius Carus) обсъжда този въпрос и ни казва, че представата за крайно, ограничено пространство е просто нелепа, защото «как можем да си представим място, за което да кажем: «Ето там е границата на света»? —От всяко място бихме могли да протегнем ръка и да стигнем до друго място или да хвърлим копие, което да отлети до ново място. Този тип разсъждения са много интересни и заслужават малко повече внимание.

На пръв поглед те са основани на наблюдения, но фактически са напълно умозрителни — обосноваването е чисто мислимо, опира се на впечатлението, че това или онова е навсякъде така, както е около нас (винаги например имаме чувството, че пространството около нас не ни ограничава по никакъв начин). Отново ще напомня за редицата на естествените числа 1, 2, 3, 4, …, N, … — няма принципни препятствия този процес да продължи неограничено. Във всяка своя фаза процесът на получаване на следващо число (операцията ПРИБАВИ ЕДИНИЦА!) не зависи от обстоятелствата, при които са били правени предишните стъпки, и не влияе върху условията за изпълнимост на следващите стъпки. В този смисъл образуването на естествените числа се описва изключително кратко: ПОВТАРЯЙ ПРИБАВЯНЕТО НА ЕДИНИЦА! Това монотонно повторение, разбира се, поражда всеки път нови числа, но за сметка на ситуацията, т.е. на числото, към което прибавяме, а не благодарение на самата операция.

Предишните разсъждения за безкрайността на пространството или времето почиват на същата основа: приема се като очевидна възможността за неограничено и безусловно повторение на определено действие и оттам се «извлича» необходимото заключение. Почти нито една от тези спекулации не е логически издържана. Едва ли според съвременните критерии за научно доказателство такива спекулации ДОКАЗВАТ нещо особено. Те твърде много наподобяват освен всичко друго разсъжденията, «доказващи» съществуването на свръхестествени неща: богове, съдба и т.н. Стремежът на хората да обосновават или да отхвърлят в зависимост от схващанията си разумността на безкрайността с помощта на спекулативни аргументи обаче не е исторически случайно явление — то има дълбоки корени в структурата на познанието (която сама по себе си би могла да бъде случайна, но това е вече друга история).

Да повторим: едни мислят, че идеята за безкрайност има място само като представа за процес, който не свършва; други (обикновено те са били малцинство) приемат, че можем да си мислим и за една завършена безкрайност. Тази втора линия достига своя апогей в края на 19 век. В рамките на математическата ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА завършената (актуална) безкрайност придобива законен статус — всъщност теорията на множествата е теория на безкрайните множества. Тези безкрайни множества са там напълно редовни обекти и могат например да бъдат елементи на други множества и т.н. Така множеството на всичките естествени числа {1, 2, … , N … } не отстъпва по своята «реалност» на отделното естествено число.

Отношението към безкрайните множества като към неща «реално» съществуващи и достойни за изследване, има извънредно плодотворен ефект в математиката. В работите на редица големи математици се установява фактът, че всъщност цялата математика може да се сведе към теорията на множествата. Това свеждане представлява определен превод от езика на математиката на езика на теорията на множествата — с други думи, представяне на всички математически обекти като конструкции от множества. Самите множества или поне онези множества, които са необходими за развитието на математическата теория, принадлежат на твърде ограничен кръг — можем да си ги представим като изградени, макар и с безкрайни процедури, единствено от празното множество!

Така според горните резултати излиза, че всеки математически обект може да се разбира като множество и ако го анализираме внимателно докрай (т. е. с максимално възможна дълбочина), не ще открием на дъното нищо друго освен празното множество. Редукцията на математическите обекти до множества от най-прост вид зависи по решаващ начин от употребата на безкрайни множества. И ако се изразяваме съвсем «художествено», може да се каже, че:

«Всички математически идеи се свеждат до (комбинациите на) две идеи — идеята за празното множество и идеята за безкрайността».

По тази причина безкрайността е крайъгълен камък в математиката. Мнозина даже дефинират математиката като наука за безкрайното. А. Поанкаре (Henri Poincaré), с когото в този случай е съгласен и Б. Ръсел, намира спецификата на математиката именно в идеята за безкрайността (защото празното множество е очевидно логическа идея — то е клас, определен от противоречиво условие). Именно безкрайността отличава според Поанкаре математиката от логиката и я прави несводима към чисто аналитични в смисъла на Кант (Immanuel Kant) истини.

Колкото и да говорим за безкрайността в математиката, няма съмнение, че за «неспециалиста» много по-интересни изглеждат «конкретните» въпроси: Съществуват ли безкрайни неща? Безкрайна ли е Вселената? Може би някои нейни части? Във философски текстове можем да срещнем най-различни твърдения по този повод. Аналогични съждения, макар и подчиняващи се на по-друго статистическо разпределение, срещаме в трудове по астрономия, космология, фундаментална физика. Днес сред физици и космолози е на мода вярването, че тази Вселена, която познаваме, може би няма да има край във времето, но сигурно има начало. Един виден физик — Юкава (Хидеки Юкава / Hideki Yukawa) — казва, че за него нещата без начало или край са много подозрителни и нямат място във физиката.* Оттук като че ли следва, че трябва да приемем и възможността за край на света, който ни заобикаля.

Трудно ми е да съдя за истината в подобни съждения. Засягам този въпрос само за да удовлетворя любопитството на известна част от слушателите, които се интересуват от «мнението на науката» относно съществуването на безкрайни обекти в реалния свят. Независимо как стоят нещата, плодотворността на идеята за безкрайност вече е очевидна — и оттук изводът, че би било странно толкова плодотворна идея да няма своите необходими основания в реалността.

Има обаче и друг отговор: Тази идея е по-скоро плод на вътрешно съзерцание, когато разумът се отдръпва от външния свят и се обръща към себе си и в този свой опит да проникне в нещата от вътрешния свят — тази рефлексия или самопознание — се натъква на необясними с други средства феномени. В такива феномени трябва да се търсят корените на представата за безкрайност. Когато нещо се обръща, насочва се към, взаимодейства със самото себе си, често възниква примка, кръг — оттук идват типичните парадокси в науките, изучаващи съзнанието. За редица явления в хуманитарната област също не можем да говорим разумно, без да използваме апарата на категорията безкрайност. Такава невъзможност е плод на тясната връзка между рефлексията с нейната очевидна кръговост и безкрайността.

Естествените езици — старогръцки, латински, новите езици — представляват средата, в която са се развивали дискусиите върху безкрайността. Дали тази среда е надеждна, дали изразните средства на естествените езици не са подвеждащи при обсъждането на въпроси, когато отсъства опората на взаимодействието с реалността (на

* ЮКАВА, Х. 1981. *Лекции по физике.* Москва: Энергоиздат, 1981, с. 96 и сл.

опита, на практиката)? Когато трябва да разчитаме единствено на логиката, този въпрос ще ни отведе към следващата тема за спекулации.

САМООТНОСИМОСТТА

Явлението, което се нарича, може би не съвсем подходящо самоотносимост или АВТОРЕФЕРЕНТНОСТ, ще ни насочи към другите две имена от заглавието на сказките — Ешер (Maurits Cornelis Escher) и Гьодел (Kurt Gödel). За Ешер може да се съобщи следното: той е холандски график, знаменит главно заради интелектуалните си творби, привлекли още от средата на тридесетте години вниманието на публиката, най-вече на учените. Ешер имал много приятели в тези среди. Графиките му са били коментирани по различен начин, но общо споделяното мнение е, че той е успял да намери визуален изказ, да създаде образ на много от най-актуалните за съвременната математика и физика идеи.

Основна тема на Ешер са невъзможните светове и ситуации: стълби, които образуват затворени кръгове, и по тях ще трябва да се качваме, за да слезем, или обратното; двумерен дракон, който е захапал опашката си в третото измерение; картинна галерия, една от картините на която изобразява същата тази картинна галерия; две ръце, всяка от които рисува другата, и т.н. Едва ли графикът е бил специално запознат с идеята за самоотносимост и едва ли си е представял ролята, която тази идея играе в областта на логиката. По-скоро съществуването на неговите рисунки свидетелствува, че идеите, които се носят във въздуха, могат да намерят реализации в най-отдалечени области на културата. Формата, в която се появяват, не ги прави различни — в основите на всички реализации на тези идеи има нещо общо.

Ще се опитам да илюстрирам общото в разните прояви на самоотносимостта с няколко езикови примера. Да разгледаме изречението:

(1) В ТОВА ИЗРЕЧЕНИЕ ИМА ДВЕ ГРЕЖКИ.

На пръв поглед всичко в изречението (1) е в ред с изключение на това, че там има ЕДНА печатна грешка (греЖка вместо греШка). Да се замислим обаче по-внимателно колко грешки наистина можем да открием в (1). След като в него се открива само една печатна грешка, то не ни съобщава нещо вярно за действителността — тук имам предвид, че изречението иначе е написано на правилен български език и за владеещите този език не е трудно да «усвоят» съобщението, кодирано чрез него. Това съобщение може да се съпостави с «реалното положение на нещата» и да се установи дали то му съответствува, или не. Така съвсем накратко се излага теорията за истината на езиковите изрази (на изречения например или на по-дълги текстове).

В (1) срещаме няколко думи, които разбираме и поотделно, и съединени в изречение. Съобщението в (1) очевидно не съответствува на състоянието на нещата (защото там има само една, а не две грешки!). От друга страна, ако едно съобщение не е вярно, казваме, че в него е допусната грешка. Следователно в (1) има и още една грешка — това, че с него неправилно е определен броят на грешките. Но тогава излиза, че все пак то правилно съобщава за състоянието на нещата — наистина грешките са две! Ако обаче грешките са две, то те са всъщност само една! Нашето изречение ту е вярно, ту не е в зависимост от това, в коя фаза от разсъжденията се намираме. Как можем да излезем от такова затруднение?

Е, добре, мнозина не биха се съгласили с тази моя спекулация. Биха казали, че в примера има същинска измама и тя се крие в тълкуването на думата «това». Как да разберем за кое изречение става дума в изречението (1)? Може би за повечето това «това» е ясно, но може и да се настоява, че се налага «допълнително изследване» с неясен изход: за кое изречение се говори в (1) и има ли изобщо (1) предмет, за който да съобщава нещо, зависи от конкретната ситуация, при която се употребява изречението. Излиза, че трябва не само да разбираме смисъла на отделните думи, а и да познаваме конкретните обстоятелства, при които тези думи се употребяват. А според някои изследователи проблемът с изречението (1) е, че няма добре определена конкретна ситуация на употреба.*

Следващият пример показва как думите се употребяват, за да опишат някаква част от действителността:

(2) ФИЛОСОФ Е ДУМА, СЪСТАВЕНА ОТ ПЕТ БУКВИ.

Отговаря ли (2) на истината? Да, макар и «философ» да се изписва с помощта на 7 букви, различните букви са 5: ф, и, л, о, с. Можем да кажем, че тук се срещат по два екземпляра на буквите «ф» и «о». Разбира се, по това може да се спори — дали буквите са различни, или употребите им са различни, но това означава, че се спори върху смисъла на «дума», «буква» и «съставена от». Няма да се задълбочавам в този въпрос, а ще се спра на ролята на думата

* Ако анализът на (1) извежда читателя от равновесие, бихме препоръчали да опита с изречението

(1') В ТОВА ИЗРЕЧЕНИЕ ИМА ГРЕШКА.

«философ» в изречението. Ако напишем още:

(3) ФИЛОСОФИТЕ ОБИКНОВЕНО СА МНОГО БОГАТИ ХОРА

можем да си представим следната картина: брадати мъдреци, (философите), стиснали кюлчета злато в ръцете си. В (2) обаче под *философ* разбираме не някакъв образ, картина, обект, а просто самата дума.

Разликата между употребата на една и съща дума «философ» в (2) и (3) е много важна. Прието е двата начина на използване да се разграничават като УПОТРЕБА — като в (3), и СПОМЕНАВАНЕ — като в (2). Редно би било на разликата между двете да се наблегне чрез някакви типографски конвенции. Често това се прави като думите, които не се употребяват (а огромното мнозинство от думите в обикновените текстове именно се употребяват), се изписват в курсив. Можем да използваме и други средства: американският философ и логик Уилард ван Орман Куайн (Willard Van Orman Quine) например предложил нещо съвсем естествено — при споменаване да слагаме кавички (както правят при цитирането). Така (2) би трябвало да се изпише като

'ФИЛОСОФ' Е ДУМА, СЪСТАВЕНА ОТ ПЕТ БУКВИ.

Това вече няма да е ортографски правилно българско изречение, защото употребата на такива единични кавички не е приета от нашия правопис. Но ако разберем изречението (2), ще схванем, че 'философ' се цитира, споменава, а не се употребява (със своето значение).

Разликата между употреба и значение играе съществена роля при обясняването на функционирането на езика като система за общуване не само във всекидневието, но и в научното изследване. Тази роля е била многократно отбелязвана не само от Куайн. Той обаче е един от най-влиятелните философи, ентусиазиран изследовател на комуникативните възможности на естествените и изкуствените езици. В една работа от преди четиридесет години разглежда следната конструкция: ако вземем някой езиков израз *T*, можем да образуваме нов израз, като най-напред изпишем споменаването (цитирането) на *T* — '*T*', и след това напишем самия израз, т.е. Куайн въвежда операцията $T \to 'T'T$.

Ето един пример: ако *T* = НЕ Е ПЕСЕН (тук използвам преводи на примери от книгата на Хофстадер), то операцията ще даде

'НЕ Е ПЕСЕН' НЕ Е ПЕСЕН.

Да наречем така описаната операция КУАЙНИЗАЦИЯ в чест на изобретателя ѝ. Най-често тя води до безсмислени езикови изрази, макар и да може да се прилага без ограничения. Нека сега обаче разгледаме по-внимателно формата:

… СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА ПЕСЕН.

Ако приложим операцията куайнизация към горното, ще получим

(4) 'СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА ПЕСЕН' СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА ПЕСЕН.

В случая имаме правилно построено изречение (при условие, че приемаме конвенцията за отбелязване на споменаването). Доколко то отговаря на истината? Отговорът зависи от това, как разбираме значенията на думите и съчетанието им в горното изречение. Да допуснем, че операцията куайнизация е вече що-годе ясна. Тогава не би трябвало да се затрудним при разбирането на (4), което говори за някакво свойство на куайнизацията на един езиков израз, т.е. за свойство на израза, който се състои от споменаването на първоначалния израз, последвано от самия този израз.

И така, за да решим въпроса за истинността на (4), трябва да се обърнем към куайнизацията на израза СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА ПЕСЕН. Но това е самото (4)! Като проверим дали то наистина става за песен, или не, можем поне по принцип да решим дали става дума за вярно съобщение. Разбира се, необходими са съответните аргументи, но те засягат разбирането на отделните думи в (4), а не цялостната му структура. Сега идва най-важният пример, когато вместо горния израз вземем израза СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА НЕИСТИННО ИЗРЕЧЕНИЕ:

(5) 'СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА НЕИСТИННО ИЗРЕЧЕНИЕ'

СЛЕД КУАЙНИЗАЦИЯ СТАВА НЕИСТИННО ИЗРЕЧЕНИЕ.

Избрали сме израз, който след куайнизация дава смислено изречение. То съобщава за някакво свойство на първоначалния израз, но ако го анализираме по-внимателно, излиза, че става дума за свойство на самото изречение. При това свойството е «да бъде вярно». Така (5) говори за собствената си истинност, но не по начина, по който това става в изречението (1). Там се използваше опасното показателно местоимение 'това', а тук няма явно апелиране към конкретната ситуация, когато се изказва или изписва (5). Избегнати са трудностите с демонстративите — трудности с печална известност в лингвистиката. Това е главната черта на изобретението на Куайн.

За (5) можем съвсем убедително да покажем, че то говори за самото себе си.

Но какво по-точно казва (5)? След така дългото обсъждане би трябвало без затруднения да видим, че това изречение ни води до същите неприятности, пред които ни изправяше (1). То може да се приеме за истина само ако не е вярно и обратното — не е истина, само ако е вярно!

Хората, натъкнали се на това явление, са били в положението на посетители на изложба на Ешер пред някоя от неговите «невъзможни» графики. Има и друга по-съществена аналогия — с древния парадокс на лъжеца: «Това, което казвам, не е истина.» През тридесетте години на нашия век логиците откриха в този древен «софизъм» една много важна страна. Тя е свързана с нашите проблеми и засяга точната и недвусмислена употреба на езика. Въпросът е в това, че различни учени по различен начин тълкуват този парадокс. Така за Алфред Тарски (Alfred Tarski) — големия полски логик, от горните примери следва, че естествените езици не са сигурна система за съхранение и комуникация на знания. Главната причина е, че естествените езици — поне както ги разбираме без някакви специални теории, са противоречиви: в тях можем да формулираме изречения като (1) и (5), които са и верни, и неверни едновременно. А това ни сблъсква с основния за логиката закон за непротиворечието.

Изводът на Тарски е следният: цялата работа е в това понятие ИСТИНА. За да можем последователно да говорим за истината, трябва да внимаваме с какви средства ще си служим. Казано съвсем грубо и накратко, за естествения език или трябва да приемем, че не съдържа средства за изразяване на верността, или че има такива средства, но тогава ще трябва да се примирим с парадокси като (5), показващи според Тарски противоречивостта на езика.

На това място бихме могли да си послужим с метафората, приравняваща езика с очила, през конто гледаме света. Ако искаме да проверим обаче диоптрите на тези очила, ще трябва да свалим очилата и да ги изследваме с други средства, да ги разгледаме с нов поглед, може би с нови очила. Докато очилата са ни на носа, трудно бихме могли да кажем дали те са например за далекогледство или за късогледство.

Тарски смятал, че няма очила, които сами да установяват своите диоптри. Неговото заключение, разбира се, звучи по-научно. В знаменитата си статия той говори за семантично затворени езици, т.е. за езици, в които има средства за изразязане на понятието «истина». Тези езици по теоремата на Тарски за неизразимост на истината са противоречиви. Естествено такива средства не са подходящи за логиката и Тарски прокламира, че «сериозни» оръдия за формулиране на логическите изследвания са единствено формалните, изкуствено създадени езици. За такива «точни» езици L ще е в сила ограничението: понятието «истина в L» вече излиза извън рамките на L и за верността на неговите изрази ще можем да говорим само в някакъв друг език M. Обикновено се приема, че M е по-широк език и по традиция той се нарича метаезик за L. Всъщност заключението на Тарски е било по същество негативно. Що се отнася до идеята, идваща от парадокса на лъжеца, тя била използвана и от Гьодел, но вече в много по-позитивен план. Чрез конструкция, аналогична на конструкцията на Куайн, той доказа великата теорема на XX в. — теоремата за непълнотата.

На тази теорема има посветено такова огромно количество публикации — статии, монографии, сборници и даже карикатури, че не е трудно човек да се откаже изобщо да коментира същината на Гьоделовия резултат. Още повече, че в други сказки от настоящия цикъл този въпрос се засяга с една или друга степен на детайлите. Д. Хофстадер разказва в книгата си как тя е възникнала от първоначалното му намерение да изложи разбираемо твърденията, наричани теорема на Гьодел за непълнота, за да може въз основа на това разбиране да критикува невероятните — понякога екстравагантни, а понякога направо безпочвени изводи, които философите обичат да правят, позовавайки се на Гьодел и неговите доказателства.

Едва ли онова, което Хофстадер прави на стотици страници, е възможно да се осъществи в рамките на няколко минути или няколко реда. Все пак ще си позволя да завърша сказката с малка бележка върху теоремите на Гьодел. Освен всичко друго те ни приближават съвсем плътно до области на човешкото познание, в които престава да действува обичайната логика. В този смисъл те наистина са индикатори на границите на познанието. Разбира се, смешно е да се приписват подобни ограничения единствено на «механичния разум». Изглежда, и човешкият ум е ограничен по същия начин — особено когато, се стреми към «рационално обяснение» на вечните загадки на битието — безкрайността например или пък парадоксите на самоотносимостта.

ПЪТИЩА КЪМ БЕЗКРАЯ*

Мауриц Ешер

Човек е неспособен да си представи, че времето би могло някога да спре. За нас, дори ако Земята би спряла да се върти около оста си и да обикаля около Слънцето, дори ако се бяха свършили дните и нощите, летата и зимите, времето би продължавало да тече вечно.

Не по-лесно е да си представим, че някъде, отвъд най-далечните звезди на нощното небе има край на пространството — граница, оттатък която *нищо* не съществува. Понятието *празен* наистина има някакъв смисъл за нас, защото можем поне да онагледим пространство, което е празно, но *нищо* в смисъл на *безпространствен* е извън способностите ни за представяне. Ето защо, откак човек лежи, седи и стои на тази наша Земя, пълзи и ходи по нея, плава, язди и лети над нея (а сега и лети далеч от нея), ние прегръщаме илюзии — отвъден свят, чистилище, рай и ад, прераждане или нирвана, — всички съществуващи вечно във времето и безкрайно в пространството.

Чувствал ли е някога композиторът — артистът, за когото времето е творческата база, желание да пристъпи към безкрая чрез своите звуци? Не зная, но ако е така, допускам, че той е оценил подръчните си средства като неадекватни да задоволят това му желание. Как би могъл композиторът да породи внушение за нещо, което не свършва? Музиката я няма, допреди тя да започне или след като спре. Тя присъства само докато ушите ни долавят звуковите вибрации, от които тя се състои. Поток от приятни, звуци, който трае през целия ден, не предизвиква внушение за безкрайност, а по-скоро умора и досада. Нито пък най-ревностният радиослушател някога би доловил някакво понятие за безкрай, ако остави апарата си включен от ранна сутрин до късна нощ, дори и да подбира само възвишени класически програми.

Не, тази задача с безкрайното е дори по-трудно решима

* ESCHER, M. C. Approaches to Infinity. — *In:* J.LOCHER, ed. *The World of M. C. Escher.* New York: Harry Abrams Inc., 1971, pp. 37 — 40. — *Бел. съст.*

динамично, отколкото статично, когато целта е да се проникне в най-дълбоката безкрайност — чрез статични и наблюдаеми образи по повърхността на прост лист хартия. Съмнително е дали има много съвременни рисувачи, графици, живописци или скулптори, у които възниква подобно желание. В днешно време те се управляват от импулси, които не могат и не искат да дефинират, от подтик, който не може да бъде разумно описан с думи, а може само да бъде почувстван несъзнателно или подсъзнателно.

Въпреки това, изглежда, може да се случи така, че някой без широки и точни познания, но с малко от трупаната от предни поколения информация в главата си, че такъв човек, прекарващ дните си както други художници в създаване на повече или по-малко фантастични картини, може един ден да почувства узряло в себе си осъзнато желание да използва своите въображаеми образи, за да се доближи до безкрайното най-близо и най-чисто.

Дълбок, дълбок безкрай! Тишина. Да мечтаеш далеч от напрежението на ежедневието; да плаваш по спокойно море на носа на кораб към отдръпващия се хоризонт, да рееш поглед в отминаващите вълни, заслушан в монотонния им плисък; да бленуваш, отлъчен в несвяст.

Всеки, който се гмурне в безкрая на времето и пространството, нататък и нататък безспир, има нужда от неподвижни точки, от километрични стълбове, за да бъде движението му различимо от пълния покой. Трябва да има звезди, край които той профучава, поставени като фарове, по които да мери разстоянието, което е изминал.

Той трябва да дели своята вселена на фиксирани дължини, на кутийки, повтарящи се в безкраен ред. Всеки път, когато преминава границата между две съседни кутийки, неговият часовник бие. Всеки, който иска да създаде вселена върху двумерна повърхност (а той се заблуждава, защото нашият тримерен свят не допуска действителност в две или четири измерения), забелязва, че времето тече, докато той работи над своето творение. Но щом свърши и погледне към направеното, той вижда нещо, което е статично и безвремево; в картината му никакъв часовник не бие и там има само равна, неподвижна повърхност.

Никой не може да прекара линия, която не е гранична; всяка линия разцепва единното в множественост. Всеки затворен контур независимо от формата си — била тя идеална окръжност, или неправилна случайна форма пресъздава още и понятията *вътре* и *вън,* и представата за *близо* и *далеч,* за *обект* и *окръжение.* Динамичното равномерно биене на часовника при всяко пресичане на гранична линия в нашето пътешествие през пространството вече не се чува, но ние можем да го заместим с нашите статични средства, с периодично повторение на сходно оформени фигури по хартиената ни повърхност, затворени форми, граничещи помежду си, допълващи силуетите си, които изпълват повърхността във всяка посока и колкото надалеч пожелаем. Що за фигури? Неправилни, безформени петна, непредизвикващи асоциации у нас? Или абстрактни, геометрични, източени фигури, правоъгълници и шестоъгълници, напомнящи преди всичко за шахматна дъска или за восъчна пита? Не, ние не сме слепи, глухи и неми; ние съзнателно оглеждаме заобикалящите ни форми, които чрез огромното си разнообразие ни говорят на ясен и вълнуващ език. Така формите, с които разкрояваме нашата повърхнина, трябва да се възприемат като знаци, като ясни знаци от живата или мъртвата материя край нас.

Ако създаваме вселена, нека тя не бъде отвлечена или мъглява, а, напротив, нека тя конкретно представя разпознаваеми неща. Нека конструираме двумерна вселена от безбройно много еднакви, но ясно разграничими компоненти. Би могла да бъде вселена от камъни, звезди, растения, животни или хора.

Какво е постигнато с методичното разкрояване на повърхнината в картината *Етюд за правилно разкрояване на равнината чрез влечуги?* Не чак истинската безкрайност, но все пак фрагмент от нея, парче от вселената на влечугите. Ако повърхнината, върху която те са напасвани, беше безкрайно широка, безкраен брой от тях биха могли да бъдат изобразени. Тук въпросът не е в интелектуалната игра; ние знаем, че живеем в материална тримерна реалност и сме неспособни по някакъв начин да произведем плоска повърхност, разширяваща се безкрайно във всичките си посоки. Което *можем* да сторим е да свием парчето хартия, на която светът на влечугите е фрагментарно представен, и да направим книжен цилиндър, така че животинските фигури по цилиндричната повърхнина да продължават непрекъснато да се сключват, когато тръбата се върти около оста си. По този начин безкрайността е постигната в една, но не и във всички посоки, защото да направим безкрайно дълъг цилиндър можем не повече, отколкото и безкрайна плоска повърхност.

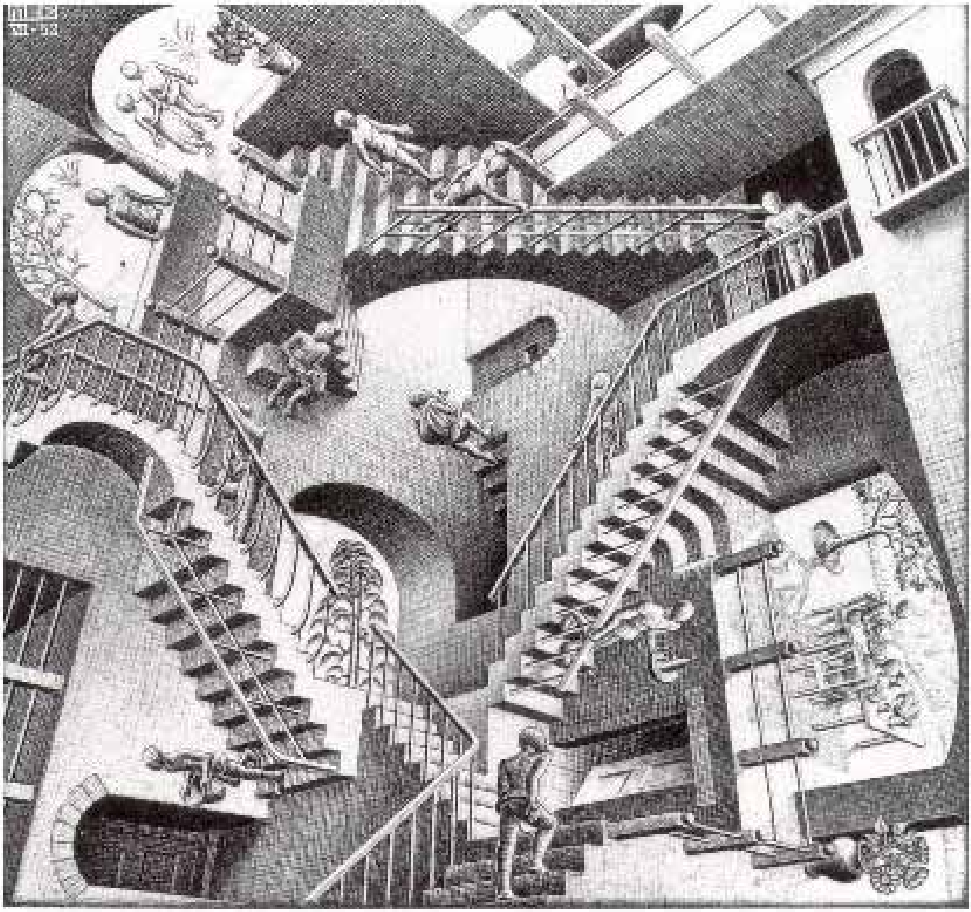
Сферата с рибите дава по-задоволително решение: дървена топка, чиято повърхност е напълно покрита от фигурите на дванайсет еднакви риби. Ако човек завърти топката в ръцете си ще види риба след риба да се появяват до безкрай. Но дали този сферичен резултат е съвсем задоволителен? Сигурно не — поне за един график, който е повече свързан с *плоската* повърхнина, отколкото някой гравьор, живописец или скулптор. А освен това и дванайсет еднакви риби не са същото като безбройно много…

Има обаче и други начини да представим безбройното, без да свиваме плоската повърхнина. *По-малки и по-малки I* е първи опит в тази посока. Площта на фигурите, от които е композирана тази дърворгравюра, непрекъснато се преполовява, радиално — от краищата към центъра, където границата на безбройното и безкрайно малкото е постигната в една единствена точка. Но тази конфигурация също остава фрагмент, защото може да бъде разширявана произволно с добавяне на растящи фигури.

Единственият начин да се спасим от тази фрагментарност и да вместим безкрая с неговата цялост в една закономерно ограничаваща го линия е да използваме подход, обратен на оня от *По-малки и по-малки I*. Първото, още тромаво приложение на този метод е показано в *Граничен кръг I*. Най-големите животински фигури сега са поставени в центъра, а границата на безбройното и безкрайно малкото е постигната по кръглата периферия. Скелетът на тази конфигурация, като изключим трите прави, минаващи през центъра, се състои само от дъги, чийто радиус прогресивно намалява към периферията. В добавка всички те я пресичат под прав ъгъл. Дърворезбата *Граничен кръг I*, бидейки първа такава творба, показва много недостатъци. Както формата на рибите — едва еволюирала до стилизирано животно линейна абстракция, така и тяхната подредба и взаимното им разположение оставят много още да се желае. С подчертани гръбни кости, които продължават една в друга, рибите се подреждат в редици от алтерниращи двойки: бели риби, обърнати с глави една към друга, и черни — с допрени опашки. Така нямаме непрекъснатост, няма еднопосочност, нито пък монохромност във всеки ред.

В цветната дърворезба *Граничен кръг III* повечето от тези дефекти са елиминирани. Тук има само редове от еднакво насочени риби: всички риби от един ред са еднакви по цвят и плуват една зад друга — глава към опашка — по кръгова траектория от периферията към периферията. И с приближаването си към центъра растат. Четири цвята бяха нужни, за да отличим всеки ред от съседните му. Никоя риба от никоя от редиците, изгряващи като фойерверк от безкрая, перпендикулярно на периферията, в която накрая се губят, никога не ще достигне граничната линия. Извън нея обаче е *абсолютното нищо.* Ала сферичният свят не може да съществува без тази празнота край себе си, не само защото *вътре* предполага *вън,* а също и защото в *нищото* лежат точно определените геометрични нематериални центрове на дъгите, конструиращи скелета.

В тези закони има нещо, което секва дъха. Те не са открития или изобретения на човешкия ум, а съществуват независимо от нас. Най-много в момент на просветление човек да открие, че те са там, и да ги опише. Много преди да е имало хора по земята кристалите вече са растели по земната кора. Един хубав ден един човек пръв се натъкнал на такава, лежаща на земята искряща трошица от подреденост или пък я е ударил с каменното си сечиво, тя се е откъртила и паднала в краката му, той я е вдигнал и като я погледнал в отворената си шепа, бил удивен.



Димитър ВАКАРЕЛОВ

логика и логики

Хаскел КЪРИ

природата на
математическата логика
(превод от английски
в. горанко)

Димитър Вакарелов

ЛОГИКА И ЛОГИКИ

Уважаеми дами и господа,

Позволете ми най-напред да отправя няколко благодарствени слова към организаторите на тази поредица от сказки и по-специално към г-н Соломон Паси за любезната и настоятелна покана да говоря на тема «Логика и логики». Аз приех, съблазнен от примамливото обещание да ми бъде противопоставен силен и; предварително неизвестен на мен опонент, с когото в края на сказката да кръстосаме шпаги в една благородна дискусия. Едва сега обаче си давам сметка за лекомислието, с което се съгласих да говоря — в случая по задължение на непрофесионален език — на тема, която винаги ме е вълнувала дълбоко професионално, защото от отговора на въпросите, които тя поставя, е зависело и отношението ми към упражняваната от мен професия — логиката. Затова се надявам, че ще ми простите, ако не се справя добре със задачата, с която сега се захващам, както се прощава на поета, когато той започне нескопосно да говори в проза за. чувствата, конто изразява в своята поезия.

Заглавието «Логика и логики» е твърде кратко, за да може да разкрие една такава тема. Под думата «логика», употребена в единствено число, ще разбирам зародилата се преди хилядолетия класическа математическа логика. Известен факт е, че тя беше оформена окончателно в началото на XX в. Още тогава в нейните рамки и по нейно подобие започнаха да се развиват редица нови логически системи, които в известен смисъл я допълваха, а в друг ѝ противоречаха и за които сега е прието общото название некласически логики. За тях се отнася втората дума от заглавието на сказката — «логики» в множествено число.

Ще говоря именно за класическата и некласическите логики: и необичайните взаимоотношения между тях. Самото съществуване на повече от една логика е вече смущаващо, защото всички притежаваме известна интуитивна увереност в единствеността на обекта на логиката, а оттам и в единствеността на науката, която има за задача изучаването на този обект. За да мога да илюстрирам по-добре тази странна ситуация на множественост в логиката, ще направя известно отстъпление, като ще напомня един аналогичен случай, шокирал математическото общество преди повече от век. Накратко той би могъл да се характеризира с подобно заглавие — «Геометрия и геометрии».

Но какво имам предвид, когато говоря за «Геометрия и геометрии». От векове в завещание от древните гърци геометрията се е развивала като наука за обективни геометрични свойства на предметите от нашия свят. В своите *Математически принципи на натуралната философия* Нютон схваща геометрията като част от механиката, в която се интересуваме от начините за описание и изучаване на формата и разположението на телата в пространството.

До Нютон, а може би и след него съществува традиция да се схващат нещата в следната схема: Има една действителност и различни области от тази действителност се изучават от отделни науки. Така например областта на механиката е движението на телата, областта на геометрията — техните форми и т. н. и никой не би допуснал, че за една и съща област са възможни повече от една взаимно изключващи се науки.

В началото на XIX в. обаче се наблюдава странна ситуация, свързана с геометрията — появяват се противоречащи си алтернативни геометрични теории. Първата от тях е нееврклидовата геометрия на Лобачевски (Николай Иванович Лобачевский). Вероятно на мнозина от слушателите е известна забележителната история на тази геометрия, която е свързана със завещаната ни от Евклид проблема за успоредността, а именно: Може ли аксиомата за успоредните прави — че през точка вън от дадена права минава не повече от една права, успоредна на дадената — да се изведе от останалите аксиоми на евклидовата геометрия? Двадесет и два века това е било костелив орех за математиците. Подходът на Лобачевски към тази проблема е бил следният: Ако аксиомата за успоредността следва от останалите аксиоми на геометрията, като се допусне нейното отрицание, рано или късно трябва да се стигне до противоречие. Следствията, които той извежда от това допускане, били доста странни за традиционната геометрична интуиция, трупали се едно след друго и скоро достигнали по обем старата евклидова геометрия, но противоречие не се получавало. Поради тези причини Лобачевски предположил, че това е една нова, непротиворечива геометрия, която той нарекъл *въображаема*.

Трудно било възприемането на въображаемата геометрия, защото тя разклаща вековния възглед, че съществува само една геометрия, която се съгласува с нашата геометрична интуиция и практика. След геометрията на Лобачевски възникват и други въображаеми геометрии. Знаем за знаменитата встъпителна лекция на Риман (Georg-Friedrich-Bernhard Riemann) *За хипотезите, лежащи в основите на геометрията,* в която той хвърля нов поглед върху геометрията. Сега вече естествено следва съществуването на най-разнообразни неевклидови геометрии. Появява се например многомерната геометрия, която противоречи на очевидния факт за триизмеримост на реалното физическо пространство. И тогава възниква естественият въпрос, как да си мислим, как да възприемаме всички тези противоречащи на нашата интуиция нови геометрии. Съдържат ли те логически противоречия? За новите геометрии било намерено строго доказателство за непротиворечивост чрез построяване на техни модели в евклидовата геометрия.

При построяването на модел, или както още се казва, интерпретация на една аксиоматична теория в друга се постъпва по следния начин: На първичните неопределяеми понятия от първата теория се съпоставят по подходящ начин понятия от втората теория, така че аксиомите на първата теория при този превод да се окажат верни твърдения от втората теория. Тогава, ако първата теория е противоречива, «преводът» би пренесъл това противоречие и във втората теория. Ако приемем, че втората теория е непротиворечива, оттук ще следва, че такава е и първата теория. Особено интересен е моделът на Клайн (Felix Klein) за планиметрията на Лобачевски: Избираме един кръг в евклидовата равнина. Понятието «точка от планиметрията на Лобачевски» превеждаме като вътрешна точка на този кръг, а понятието «права от геометрията на Лобачевски» като хорда в кръга. Съотношението «точка лежи на права» превеждаме като «точка лежи на хорда от кръга». При тази интерпретация се оказва, че всяка аксиома от планиметрията на Лобачевски се превръща във вярно твърдение на евклидовата планиметрия. Специално аксиомата на Лобачевски за успоредните прави се превръща в следното очевидно евклидово твърдение: «През вътрешна точка от даден кръг, нележаща на хорда от този кръг, минават поне две хорди, непресичащи дадената хорда.» Този модел освен непротиворечивост на геометрията на Лобачевски ни дава и нещо повече — а именно как да си мислим тази геометрия, използвайки представи от нашата евклидова геометрична интуиция. На многомерната геометрия също била намерена нагледна интерпретация чрез развиване на проекционни методи от многомерното пространство върху евклидовата равнина. И така, както можем да начертаем върху равнина тримерния куб, същото можем да направим и за четиримерния куб, което позволява по някакъв начин да си го представяме.

Постепенно духовете се успокоили – има много непротиворечиви геометрии, ние сме се родили в една от тях – евклидовата. През нейните «очила» можем да надникнем и дори да се преселим във всяка от останалите. Сега вече фразата «Геометрия и геометрии» се напълни със съдържание и може да се замени с по-точната: «Евклидова и неевклидови геометрии».

Вече е време след това малко дълго геометрично отстъпление да се върнем към нашата първоначална тема за класическата и некласическите логики. Аналогията на това отношение с връзката евклидова – неевклидови геометрии е съвсем близка. Разликата е, че сега тази множественост не за всички е толкова шокираща. Хората на науката от XX в. преживяха няколко методологически преустройства, свикнаха със съществуването на евклидова и неевклидови геометрии. Примириха .се с факта, че освен нютонова физика има и ненютонова – айнщайнова, а когато се появиха парадоксите в теорията на множествата, решиха, че и тази царица – логиката, може би не е единствена.

За да мога да характеризирам по-точно връзката класическа логика – некласически логики, ще се опитам да дам известна представа за тях. И така, що е класически математическа логика? Съгласно американския логик Къри (Haskell Curry) това е математическа теория на онези логически разсъждения, които математиците правят, когато доказват своите теореми. Логически разсъждения, разбира се, се правят не само в математиката, но в известен смисъл тя е най-големият консуматор на логика. Например ние сигурно бихме повярвали в питагоровата теорема, ако вместо доказателството ѝ направим достатъчен брой измервания на различни правоъгълни триъгълници, което ще ни убеди, че действително квадратът на хипотенузата е равен на сбора от квадратите на катетите. По този експериментален път и днес се откриват немалко истини в съвременната наука. От друга страна обаче, извеждането на питагоровата теорема по чисто умозрителен логически път от други геометрични факти, които в последна сметка се свеждат до няколко прости и очевидни аксиоми, е направило на древните гърци огромно впечатление. Опиянени от силата и успехите на дедуктивното мислене, те го издигнаха в аксиоматичния метод до ролята на единствен инструмент за обосноваване на истините в математиката, превръщайки логиката в една игра на човека срещу неизвестното. Интересно е да се знае кога тази «игра» е била започната, макар и неосъзнато, т.е. кога за първи път умозрителният извод се е оказал по-силен от обичайното наблюдение и експеримента. Ще дам един пример, който датира около 20 века преди нашата ера.

Става дума за два известни египетски папируса, в които са описани определен брой математически задачи с практически характер, решавани в периода около XX – XVIII в. пр. н. е. Ще спомена три от тях: определянето на обема на правоъгълна призма, пирамида и пресечена пирамида. Вероятно формулата за обем на призма $V = B.h$, където B е лицето на основата, а h – височината, е била получена от непосредственото наблюдение при измерване на обеми с кубическа единица. Формулата за обема на пирамида $V = B.h / 3$ вероятно е била получена чрез следния експеримент, който и сега се прави при малките ученици. Ако си изработим модели на призма и пирамида с равни основи и равни височини, напълним пирамидата с пясък (в Египет и сега има много пясък!) и го пресипем в призмата, тази процедура трябва да направим точно три пъти, за да се напълни призмата. И тъй като обемът на призмата е $B.h$, оттук веднага следва, че обемът на пирамидата ще бъде $B.h / 3$ Друга е обаче ситуацията с пресечената пирамида. В съвременни означения за нейния обем имаме формулата

$$V=\frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right)$$

, където B_1 и B_2 са лицата на двете основи, а h е височината. Немислимо е такава сложна зависимост да бъде открита чрез експеримент, подобен на описания. Правдоподобно е да е била изведена по някакъв математически начин от формулата за обем на пирамида, както това сега лесно може да направи всеки гимназист, т.е. тази формула вероятно е била получена не в резултат на наблюдение или експеримент, а чрез умозрително МАТЕМАТИЧЕСКО РАЗСЪЖДЕНИЕ.

На Аристотел дължим първия чист екстракт на някои логически форми на разсъждение – най-известните логически закони като закона за изключеното трето, закона за непротиворечието и закона за тъждеството. Всичко това обаче представлява само една малка част от мощния арсенал от логически форми на разсъждение, които са се употребявали в гръцката математика и които се използват и сега. Необходими бяха още двадесет и два века наблюдения над математическата практика на разсъждаване, за да може в края на XIX и началото на XX в. да се извърши пълното им екстрахиране в рамките на класическата математическа логика.

Ето скица на тази логика:

Първото положение, което се приема в нея и което е извлечено от реалната логическа практика, е принципът за двузначност, съгласно който всяко съждение може да бъде вярно или невярно и тези две верностни стойности са взаимно изключващи се. Това е абстракция, която води началото си още от Аристотел, но в най-категорична форма е била изказана от един от наследниците на Аристотел — Хризип (Χρύσιππος ὁ Σολεύς, Chrysippus of Soli). Поради принципа за двузначност сега е прието класическата математическа логика да се нарича още двузначна логика.

Второто положение, което се приема в тази логика и което аз ще нарека за краткост принцип за съчленяването, е, че от по-прости съждения — например A и B, с помощта на логически съюзи от типа на «и», «или», «ако..., то...», «тогава и само тогава» и частицата «не» можем да образуваме чрез съчленяване по-сложни съждения «A и B», «A или B», «ако A, то B», «A тогава и само тогава, когато B», «не A». За логическите съюзи обикновено се въвеждат кратки символни означения и специални названия — например $\neg$ — «не» (отрицание), $\wedge$ — «и» (конюнкция), $\vee$ — «или» (дизюнкция), $\Rightarrow$ — «ако ..., то ...» (импликация), $\Leftrightarrow$ — «тогава и само тогава» (равнозначност). Тогава по-сложните съждения биха изглеждали така: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$. С употреба на скоби бихме могли да образуваме и още по-сложни съждения: $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $A \Leftrightarrow A$, $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ и др. Разбира се, кратките символни означения съвсем не са най-важното тук — спокойно можем да запазим техния езиков еквивалент, като регламентираме строго неговата синтактична употреба, както например това сега се прави в езиците за програмиране.

Принципът за съчленяване е доста силна абстракция. На практика съгласуваме само свързани по смисъл съждения, иначе се получават безсмислици от типа «ако 2 × 2 = 4, то София е столица на България» и др. Трудна работа е обаче да се разграничи кои съждения са свързани по смисъл и кои не. И затова именно от гледна точка на простотата сме принудени да приемем принципа за съчленяването.

Третият принцип, който е свързан с името на Пирс (Charles Sanders Peirce) и който ще нарека за краткост принцип за функционалност, твърди, че верностната стойност на едно сложно съждение зависи единствено от верностните стойности на неговите съставки и вида на свързващата логическа връзка. Например, ако А има стойност «вярно», то «не А» ще има стойност «невярно» и, обратно, ако А има стойност «невярно», то «не А» ще има стойност «вярно». Като означим верностните стойности с В и Н, верностните стойности на отрицанието «не А» може да се запишат с помощта на следната верностна таблица:

A	$\neg A$
В	Н
Н	В

За останалите логически съюзи се приемат следните верностни таблици:

		… и …	… или …	ако …, то …	… точно тогава, когато …
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
В	В	В	В	В	В
В	Н	Н	В	Н	Н
Н	В	Н	В	В	Н
Н	Н	Н	Н	В	В

Най-лесно се възприемат таблиците за конюнкцията («и»), дизюнкцията («или») и равнозначността («точно тогава, когато»). Например очевидно е, че когато твърдим «А и В», то това е вярна единствено в случая, когато и А е вярно, и В е вярно. Но точна това е казано в таблицата за конюнкцията. Аналогично «А или В» не е вярно единствено, когато нито А, нито В е вярно.

По-сложен е случаят с импликацията «ако А, то В». Още Хризип в Древна Гърция е казал, че единственият случай, при който тя е невярна, е, когато условието А е вярно, но заключението В е невярно. Следователно във всички останали случаи тя ще бъде вярна, а точно това е казано и в нейната таблица. Въпреки това обаче срещу тази таблица често се възразява, защото според нея например следните съждения трябва да приемем за верни, а те са по-скоро безсмислени:

ако 2 × 2 = 5, то София е столица на България;

ако 2 × 2 =т 5, то Пловдив е столица на България. Причина за това е по-скоро принципът за съчленяването (който ни разрешава да свързваме такива далечни по смисъл съждения), отколкото таблицата за импликацията.

Съждения от типа 1) и 2) обикновено се наричат парадокси на импликацията.

Представляват интерес такива логически изрази, построени от променливи и логически връзки и имащи форма на съждения, от които при заместване на променливите с произволни съждения (независимо верни или неверни) винаги се получава вярно съждение. Такива формули се наричат логически закони. Например Аристотеловите закони за изключеното трето, непротиворечието и тъждеството се изразяват съответно с формулите $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $A \Leftrightarrow A$.

Описаната дотук част на математическата логика е прието да се нарича *класическо съждително смятане.* В него не се изследва структурата на простите съждения, т.е. съжденията, които не могат да се представят като съчленения на по-прости съждения. Анализът на такива съждения показва, че в тях участват имена на обекти, свойства, отношения и кванторите за общност и съществуване.

Логиката, която се занимава с изследването на тази по-дълбока структура на съжденията, е прието да се нарича *класическо предикатно смятане.*

Няма да се спирам подробно на описанието на тази част от логиката. Ще поясня само смисъла на кванторите за съществуване и общност — съответно $\exists$ и $\forall$ Нека например $r(x)$ означава «x е четно число». Това е формула, която още не е съждение, защото x е променлива. Когато на мястото на x се поставят конкретни естествени числа, ще се получат вече конкретни съждения, някои от които ще са верни, като $r(2)$, $r(4)$, $r(6)$ и т.н., а други — неверни, като $r(1)$, $r(3)$, $r(5)$. Съждението «съществуват четни числа» в предикатната логика се записва с формулата $\exists x r(x)$ — «съществува x такова, че x е четно число». Очевидно това съждение ще бъде вярно, ако в редицата на естествените числа 1, 2, 3,... има поне едно четно число, което може да се изкаже със следната безкрайна дизюнкция: «r (1) или r (2), или r (3), или …». Тъй като още вторият член на тази дизюнкция $r(2)$ е верен, то $\exists x r(x)$ е вярно съждение.

Съждението «всички естествени числа са четни» се записва сега така: $\forall x r(x)$. Смисълът му съвпада със смисъла на безкрайната конюнкция $r(1)$ и r (2), и r (3), и …, която за да бъде вярна, трябва всичките ѝ членове да са верни. Тъй като тук още първият член $r(1)$ не е верен, то и $\forall x r(x)$ е пример за невярно твърдение. Предикатната логика също си има свои логически закони — например

$$\neg \forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

Надявам се, че тези кратки сведения за класическата математическа логика създават у слушателя известна представа за нея. Както казах, тази логика е била вече напълно оформена в началото на XX в. Нейният език се оказа удобен за записване и анализ на математическите разсъждения. Днес я наричаме класическа, защото тя продължава започнатия от Аристотел анализ и обхваща адекватно почти всички форми за логически разсъждения, които .се употребяват в математиката. Още в началото на XXв. започват да се появяват логически системи, които силно се различават от класическата логика. За тях по-късно се възприема названието некласически логики и аз сега ще се спра на някои от по-забележителните.

Първата, критика срещу класическата математическа логика като логика, която математиката трябва да използва, е била направена от Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) — основателя на интуиционисткото направление в математиката, за което беше споменавано в предишните сказки. Най-напред Брауер подлага на съмнение закона за изключеното трето — «A или не A» — един закон, който от времето на Аристотел повече от 20 века е бил непоклатима основа на логиката. Възражението на Брауер срещу абсолютната валидност на този закон, а също и срещу някои други закони на логиката е следното: Логиката е възникнала като обобщение на вековния човешки опит предимно с крайни съвкупности, с крайни и обозрими в рамките на човешкото възприятие неща, които са гарантирали ефективната проверимост на съжденията, изказвани от човека. В математиката на древните гърци обаче навлиза безкрайното и логическите операции, които хората дотогава са свикнали да правят с крайните неща и да прилагат законите на логиката към тях, сега започват да се прилагат и към безкрайни съвкупности — една неправомерна или поне доста силна абстракция.

Още повече, че понятието «безкрайно» е също една абстракция, за която често се спори дали притежава обективни съответствия. Ето защо Брауер предлага едно по-внимателно използване на логиката при прехода ѝ от крайно към безкрайно, което той свързва с понятието за ефективна проверимост. Специално за твърденията за съществуване той предлага следния критерий за истинност: Ако F е означение на някакво свойство, то съждението $\exists xF(x)$ («съществува x със свойството F») ще бъде вярно, ако има обект a със свойството F и освен това е даден и ефективен метод за намиране на поне едно такова a. Тъй като; $\exists xF(x)$, както вече видяхме, може да се схваща като една дизюнкция $F(x_1) \vee F(x_2) \vee F(x_3) \vee \ldots$, този критерий означава, че тази дизюнкция е вярна, ако има поне един верен член и е даден ефективен метод, с който можем да го намерим. Приложен към обикновена дизюнкция, критерият на Брауер казва, че $A \vee B$ е вярна, ако поне едно от съжденията A или B е вярно (дотук това е класическият критерий за вярност на дизюнкцията) и освен това е даден ефективен метод за определяне кой от двата члена е верният. По този критерий за вярност на дизюнкцията законът за изключеното трето $A \vee \neg A$ ще бъде верен, ако поне едно от съжденията A и не A е вярно и освен това съществува ефективен метод, който да определя кое именно от двете съждения е вярното. Ако обаче такъв метод съществуваше, тогава ние бихме могли, да го прилагаме към всеки научен проблем (защото той може да се формулира като алтернатива — A или не A) и щяхме да имаме готов механизъм за откриване на всички истини в света. А такъв механизъм, както това бе показано в предишните сказки, не съществува. Следователно законът за изключеното трето в логиката на Брауер, която по-късно е била наречена интуиционистка логика, не е общовалидна истина.

Близка до интуиционистката логика е конструктивната логика на Марков (Андрей Андреевич Марков - младший). За нея ще отбележа само, че неясното понятие за ефективна процедура е заменено с точното понятие за алгоритъм, на което беше посветена сказката на другаря Петков. (Очевидци твърдят, че на това място колегата Петков изявил недоволство, защо не е бил наречен от сказчика господин Петков — *Бел. съст.)*

Многозначната логика е една друга критика на класическата логика, при което класическият принцип за двузначност се заменя с принцип за многозначност. Полският логик Лукашевич (Jan Łukasiewicz), който е първият автор, предложил тризначна логика, твърди, че понякога има съждения, които не могат да бъдат оценени нито като верни, нито като неверни, и това са например съжденията за бъдещи случайни събития, за които няма видима причина в. настоящето. «Утре ще има морско сражение» — пример, даден още от Аристотел — е съждение, за което едва утре ще разберем дали е вярно или не. Следователно, ако нямаме никакви достатъчни основания, че утре наистина ще има морско сражение, днес това съждение няма да бъде нито вярно, нито невярно. Лукашевич му приписва трета стойност — неопределено, и на базата на тази трихотомия строи своята логика.

В тризначната логика престават да бъдат валидни не само законът за изключеното трето, а и запазеният в интуиционисткцата логика закон за непротиворечието. Многозначната логика от своя страна търпи различни вариации — тризначни, четири-значни, k-значни, безкрайнозначни логики, като освен това при фиксиран брой на верностните стойности са възможни различни варианти. Например съветският логик Бочвар (Дмитрий Анатольевич Бочвар) разработва друга тризначна логика, предназначена за осмисляне на парадоксите в теорията на множествата, при която третата стойност се тълкува не като «неопределено», а като «безсмислено». Често многозначната логика се разглежда като обобщение на класическата математическа логика, поради което последната се нарича двузначна.

В началото на века се появяват и първите логически системи на модалната логика, в която освен класическите връзки между съжденията се изучават и модалннте операции като необходимо, възможно, случайно и др. Американският логик Луис (Clarence Irving Lewis) предложи пет такива системи, които означи: S1 — S5. Сега тези системи са класически. Например системата S5 съдържа следните логически закони ($\Box A$ се чете «необходимо А»):

$(\Box (A\Rightarrow B) \wedge \Box A) \Rightarrow \Box B$: Ако импликацията $A\Rightarrow B$ е необходима и A е необходимо, то и B е необходимо.

$\Box A\Rightarrow A$: Ако A е необходимо, то A е вярно.

$\neg\Box A \Rightarrow \Box\neg\Box A$: Ако A не е необходимо, то необходимо е това да бъде така.

Системата S4 се получава от S5, като последния закон заменим със следния:

$\Box A \Rightarrow \Box \Box A$: Ако A е необходимо, то необходимо е това да: бъде така.

Какъв е тук смисълът на думата «необходимо» и каква е тънката разлика между логиките S4 и S5? Вероятно и на самия Луис му е било трудно да отговори на този въпрос. Той е схващал, че в думата «необходимо» могат да се вложат различни значения, и затова е предложил не една, а няколко различни модални системи.

Едно от тълкуванията на «необходимо» е «необходимо вярно».. Съществуват и тълкувания, свързани с времето, като «винаги в бъдещето», «винаги в миналото», «винаги» (и в бъдещето, и в миналото). Това дава тласък за развитие на специализирано направление на модалната логика, в което модалностите имат темпорално тълкуване —т.нар. темпорална логика. Появява сей деонтичната модална логика, в която се изследват деонтичните модалности — «разрешено», «забранено», «задължително», епистемичната логика с модалностите — «зная, че», «вярвам, че» и т.н. В началния стадий на това логическо стълпотворение различните нови модални системи са се строели по определен канон — за определен вид модалност са се избирали аксиоми и правила за извод, чиято истинност се е приемала въз основа на немного ясни интуитивни съображения. Понякога са се водили дълги дискусии относно приемането или отхвърлянето на определена аксиома, които поради липсата на ясна семантика често са били безплодни. Всички логики от модален тип, които се появяват в този период, са били аксиоматични системи, разширяващи езика на класическата логика с един или няколко едноместни модални оператора. Не е било ясно как да се построи точна семантика на тези системи, която да запазва смисъла на класическите логически операции. От друга страна, е било известно, че ако искаме да запазим принципа за двузначност, за новите оператори непременно ще трябва да нарушим принципа за функционалност — че верността на сложното съждение е функция от верностните стойности на неговите компоненти. Например верността на «зная, че *A*» не зависи от верностиата стойност на съждението *A*, а изключително от това, дали аз зная, че то е вярно.

И така, в средата на нашия век ситуацията в логиката е била следната: Наред с класическата логика, която си остава основен инструмент на математическото мислене, се предлагат различни некласически системи — интуиционистката и конструктивната логика, които налагат ограничения на класическите условия за истинност, като това се свързва с понятието за ефективна процедура и алгоритъм; многозначните логики, които в немного ясна познавателна форма обобщават принципа за двузначност, различните направления в модалната логика, които се развиват чисто формално и тогава все още чакат своята семантична теория. В моя обзор не споменах всички съществуващи по онова време изследвания в некласическата логика — например релевантната логика, която се стреми да отстрани парадоксите на класическата импликация, но и нейните успехи тогава са били все още незадоволителни. Построени са серия формални системи с полуинтуитивна интерпретация, които подобно на модалната логика са очаквали задоволителна семантична теория.

Тогава във Вавилонската кула на некласическите логики остро се чувствува нуждата от някаква обединяваща идея, която да преодолее разноезичието и взаимното неразбиране и да даде задоволително обяснение и оправдание за възникналата плуралност. И тази идея не закъснява — в началото на 60-те години американският логик Крипке (Saul Aaron Kripke) създава своята семантична теория за възможните светове, която най-напред беше използвана за интерпретиране на модалните системи, след това бе приложена последователно към интуиционистката и релевантната логика, а през 70-те години — и към различни системи на многозначната логика. Тъй като колегата Сотиров в своята сказка, засегна този въпрос, аз ще се спра съвсем кратко на тази плодотворна идея, която предизвика същинска революция в областта на некласическите логики.

Ще припомня само интерпретацията на две класически модални системи S5 и S4.

В класическата логика съгласно принципа за двузначност всяко съждение се оценява като вярно или невярно. Крипке обобщава малко нещата, като предполага, че освен това ни е дадено едно множество от светове — възможни светове, и всяко съждение във всеки свят се оценява като вярно или невярно. Така верността на отделните съждения вече зависи от това, към кой свят са отнесени.

Верността на едно съставно съждение в даден свят, в което участват само класически логически връзки, се определя съгласно обичайните правила на класическата логика. Ако въведем означението $x \Vdash A$ за «в света x е вярно съждението A», то тези правила ни дават:

$x \Vdash \neg A$ е равносилно на: не е вярно, че $x \Vdash A$,

$x \Vdash A \wedge B$ е равносилно на $x \Vdash A$ и $x \Vdash B$,

$x \Vdash A \vee B$ е равносилно на $x \Vdash A$ или $x \Vdash B$,

$x \Vdash A \Rightarrow B$ е равносилно на: ако $x \Vdash A$, то $x \Vdash B$,

$x \Vdash A \Leftrightarrow B$ е равносилно на $x \Vdash A$ точно тогава, когато $x \Vdash B$

Виждаме, че тази семантика запазва във всеки свят класическата логика. Каква е сега семантиката на $\Box A$ — «необходимо A». За системата S5 тя е следната: $\Box A$ е вярно в даден свят x точно тогава, когато A е вярно във всеки възможен, свят y, т.е. $x \Vdash \Box A$ е равносилно на $(\forall y)(y \Vdash A)$.

За модалния оператор $\Diamond A$ — «възможно A» — интерпретацията е следната: $\Diamond$Л е вярно в даден свят x точно тогава, когато съществува свят y, в който е вярно А, т.е. $x \Vdash \Diamond A$ е равносилно на $(\exists y)$ $(y \Vdash A)$.

Сега вече е ясен смисълът на «необходимо» и «възможно» в системата S5 — това са съответно истинност във всички възможни светове и истинност в поне един свят. По-свободно изказано, $\Box A$ означава «A е вярно навсякъде», а $\Diamond A$ означава «A е вярно някъде».

За да формулирам семантиката на S4, нека в множеството на световете въведем една релация на достижимост, за която предполагаме, че удовлетворява следните условия:

1) всеки свят е достижим от себе си;
2) ако x е достижим от y и y *е* достижим от z то x е достижим от z.

Сега семантиката на $\Box A$ в S4 е следната: $\Box A$ е вярно в даден свят x ако A е вярно във всеки достижим от x свят $\Diamond A$ е вярно в даден свят x, ако A е вярно в поне един достижим от x свят.

Семантиката за S4 лесно може да се модифицира за S5 — ако предположим, че всеки два свята са взаимно достижими, веднага получаваме условията за вярност на модалностите в S5. Този пример показва голямата гъвкавост на подхода на Крипке и способността му да се пригажда към различни логики — ако предположим други свойства на релацията достижимост, ще получим други логически системи.

Не при всички случаи «възможните светове» трябва да се-, схващат в техния буквален смисъл. Например в логиките с темпорални модалности това са моменти на времето, а релацията «x е достижимо от y» сега се интерпретира като «x е след y». При семантиката, която Крипке построява за интуиционистката логика, възможните светове могат интуитивно да се интерпретират като порции информация, релацията «достижимост» между x и y сега е просто включване на информацията x в информацият y, а «съждението A е вярно в x» сега се интерпретира съдържателно като «информацията x ни дава основание да твърдим A». Например смисълът на отрицанието при тази семантика е следният:

$$x \Vdash \neg A \leftrightarrow (\forall y)\ (x \subseteq y \rightarrow y \nVdash A),$$

което неформално означава: «информацията x ни дава основание да твърдим $\neg A$ точно тогава, когато всяка информация y, която включва x, не ни дава основание да твърдим A».

Разгледаните примери показват, че семантиката на дадена: некласическа логика чрез възможни светове представлява модел — един превод на тази логика в класическата математическа логика. По този начин Крипке придаде на класическата логика онази централна и организираща роля за семейството на некласическите логики, каквато в миналия век изигра евклидовата геометрия по отношение на неевклидовите геометрии. И така, както с помощта на моделите на неевклидовите геометрии в евклидовата геометрия успяхме да си създадем представа как би изглеждал един неевклидов свят, така чрез семантиката на възможните светове успяваме да пречупим през призмата на класическата логика различните некласически логики. Това внесе спокойствие в смутените от плурализма души на некласическите логици и те започнаха с нов ентусиазъм масово производство на нови логики не само за задоволяване на своето собствено любопитство, но и за прилагане в други области на знанието и в прослава на истината.

Септември 1988 г.

Хаскел Къри

ПРИРОДАТА НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЛОГИКА*

Ще започнем това изследване, като разгледаме трите смисъла, които думата «логика» има в обичайната реч.

Първият смисъл е оня, който имаме предвид, когато казваме, че «логика е анализът и критиката на мисленето»[1]. Ние установяваме, че разсъждаваме, като извеждаме заключения от данните, с които разполагаме; забелязваме, че понякога тези заключения са коректни, а понякога не; и че понякога тези грешки се обясняват с факта, че някои от изходните ни данни са погрешни, но не винаги; и постепенно осъзнаваме, че на разсъжденията, провеждани в съответствие с определени норми, може да се разчита, ако изходните данни са коректни. Изучаването на тези норми или принципи на правилното разсъждение винаги е било разглеждано като дял от философията. За да отличим логиката в този ѝ смисъл от другите значения, разгледани по-нататък, ние ще я наричаме *философска логика*.

При изучаване на философската логика се оказа плодотворно прилагането на математически методи, т.е. построяването на математически системи, имащи определени връзки с тази логика. Какво представлява такава система и каква е природата на тези връзки — това са въпроси, които ще ни интересуват по-късно. Така построените системи са също обект на изследване сами по себе си и естествено е към такова изследване също да бъде приложен терминът «логика». Логиката в този смисъл е дял на математиката. За да отличим този смисъл от другите, такава логика ще наричаме *математическа логика*.

В двете разгледани значения думата «логика» се употребява като собствено име. Тази дума често се употребява и като нарицателно име и тази употреба е третият смисъл на думата, различен от първите два. В този смисъл една логика е система или теория както и всяка друга такава, изучавана с математическата или философската логика.

* Откъс от въведението към книгата на CURRY, Haskell. 1963. *Foundations of mathematical logics.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1963. — *Бел. прев.*

[1] JOHNSON, W. E. *Logic*. London. Part I, 1922; Part II, 1924; Part III, 1924.

Така можем да говорим за класически логики, модални логики, матрични логики, аристотелови логики, кантови логики и т. н.

Можем да поясним донякъде връзката между трите значения на думата «логика», като разгледаме съответните значения на думата «геометрия». В първия смисъл геометрия е науката за пространството. Етимологично тази дума значи измерване на земята и се смята, че най-старата геометрия се е състояла от правила за земемерие в древния Египет. Така разглеждана, геометрията е дял от физиката. Но наред с това има и геометрия като дял от математиката. В нея човек разглежда математически системи, имащи някаква връзка с изучаването на пространството. И накрая имаме много видове геометрии: говорим за проективна геометрия, диференциална геометрия, неархимедова геометрия или недезаргова геометрия, четиримерна геометрия и т. н.

И така, *математическата логика е дял от математиката, който е свързан с анализа и критиката на мисленето по начин, много сходен с връзката между геометрията и науката за пространството.*

Засега в дефинирането на понятието «математическа логика» повече от направеното не може да се желае. Всъщност безсмислено е да се определя даден клон на науката чрез точно отграничаване на неговия обсег; по-скоро определя се централната идея или цел на предмета, а границите му се оставят да се разпрострат докъдето сами могат. Предимство на дадената дефиниция на логиката е нейната широта, която допуска различни нюанси в употребата. Нещо повече, можем да говорим за «логически системи» или «логически алгебри», без да даваме точен критерий, определящ дали дадена система е такава; достатъчно е тя да е свързана по един или друг начин с анализа на мисленето.

Има обаче някои бележки, които е уместно да направим сега, за да разширим и поясним горните разсъждения.

Първо, връзката между геометрия и реално пространство може да бъде твърде далечна, какъвто например е случаят с една крайна геометрия, недезаргова геометрия или безкрайномерна геометрия. Наистина не е ясно кога точно една система е геометрия и коя не е. По отношение на логиката нещата стоят по същия начин. Ние можем да разглеждаме и наистина разглеждаме логики като формални структури, чиято значимост за философската логика е в някаква формална аналогия с други, по-пряко приложими системи.

Второ, обичайната употреба на понятието «геометрия» го ограничава до неговия математически аспект. Наистина този математически аспект се е развил до такава степен, че ако искаме да говорим за физическия аспект, сме принудени да използваме някакъв друг термин. Аналогична ситуация в областта на логиката още не е настъпила, а дали това ще стане в бъдеще, както някои твърдят, или не, не е наша работа да решаваме. Това, което беше казано тук за философската и математическата логика, е в пълно съответствие със съвременната употреба на тези термини.

Трето, въпреки че — с цел да уточним нашите понятия — подчертавахме разликата между различните значения на думата «логика», би било грешка да смятаме, че философската и математическата логика са напълно различни предмети. Всъщност те се намират в единство. Математическата логика, както беше казано, е плодотворна като средство за изучаване на философската логика. Всяко рязко разграничаване на тези два аспекта на логиката би било произволно.

Накрая математическата логика заема особено положение спрямо останалата част на математиката, тъй като математиката е дедуктивна наука — поне доколкото понятието за строго доказателство е фундаментално във всички нейни части. Въпросът какво е строго доказателство е въпрос на логиката в светлината на горната дискусия. Следователно той попада в обсега на логиката, а доколкото касае математиката, целесъобразно е да се разглежда като въпрос на математическата логика. Така задачата за обяснение на природата на математическата строгост се пада на математическата логика и всъщност може да бъде считана за неин основен проблем. Ние приемаме, че тази задача включва изясняване на природата на математическата истина, а и природата на математиката изобщо, и изразяваме това, като казваме, че *математическата логика включва изучаването на основите на математиката*.

Димитър Скордев
съществува ли канторовият
рай и наистина ли е рай?

Лудвиг Витгенщайн
лекция по етика (превод от
английски р. дачев и
с. паси)

Димитър Скордев

СЪЩЕСТВУВА ЛИ КАНТОРОВИЯТ РАЙ И НАИСТИНА ЛИ Е РАЙ?

В тази сказка става дума за теорията на множествата, главният създател на която е немският математик Георг Кантор (1845—1918 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor). «Канторовият рай» — това е «светът на множествата», за който говори споменатата теория. Наречен е «рай» поради големите удобства, които предоставя теорията на множествата на логиката и математиката — особено за въвеждане на ред в боравенето с безкрайното*. Заглавието на сказката обаче съдържа един въпрос, който подсказва, че около тази теория не всичко е безоблачно. Той е възникнал и вълнува логиците и математиците поради определени трудности във връзка с нея. Трудностите имат логически характер и някои от тях са тъй сериозни, че представляват предизвикателство към човешкия разум. От друга страна, в основата на теорията на множествата лежат идеи от общологически характер, интересни за много по-широк кръг от хора, отколкото е кръгът на професионалните логици и на математиците.

Ще се спра накратко на основната идея, върху която се гради теорията на множествата. Традиционно твърдение е, че най-съществената идея в нея е идеята за актуално безкрайното. Без да отричам важността на тази идея за теорията на множествата, ще си позволя да оспоря горното твърдение. Според мен най-съществена измежду идеите, лежащи в основата на теорията на множествата, е следната: наред с осезаемите, сетивно възпринимаеми основни прости обекти допустимо е да разглеждаме други, по-абстрактни обекти, които се получават от тях и евентуално от по-рано получени абстрактни обекти чрез групиране с помощта на техни свойства. С други думи, разрешава се да извършваме следното действие: измежду наличните

* Изразът «рая, които ни създаде Кантор» се среща на с. 262 от книгата: ХИЛБЕРТ, Д. 1978. (David Hilbert) *Основи на геометрията.* София, 1978. По-точно там се казва, че не би трябвало да бъдем изгонени от този рай, а преди това е дадено вдъхновено описание както на осъществения в неговите предели триумф на безкрайното, така и на събитията, помрачили този триумф.

обекти разглеждаме онези, които имат някакво дадено свойство, и образуваме нов обект — множеството, съставено от тях. По такъв начин свойствата на наличните в даден момент обекти пораждат нов вид обекти — множества, съставени от тях, т.е. имаме систематично превръщане на свойства на обекти в нови видове обекти.

Нещата във връзка с току-що споменатата идея могат да бъдат описани малко по-подробно по следния начин: За да изградим «света на множествата», в който ще работим, ние тръгваме от някакви първоначални обекти, които биха могли да бъдат дадени реално съществуващи обекти, като например слушателите на настоящата сказка (допустимо е да вземем за първоначални и някои въображаеми обекти или пък обекти, съставени чрез някаква абстракция, различна от онази, чрез която се получават множества). След това към тези първоначални обекти добавяме всевъзможни групи, по различен начин образувани от тях. Тези групи можем да наречем множества от първоначални обекти. Конкретни такива множества се посочват в най-простия случай с изброяване на обектите, които им принадлежат, а в по-общия случай — с помощта на свойства, характеризиращи принадлежащите им обекти. Например можем да спрем нашето внимание върху множеството от слушателите на тази сказка, които са седнали на първия ред в залата — това е множество, определено с едно характеристично свойство, а с други характеристични свойства можем да определим други множества от слушатели. Добре е да отбележим, че повечето от въпросните множества съществуват не като сетивно възпринимаеми обекти, а по-скоро като обекти на мисълта. Така например, докато множеството на слушателите, седнали на първия ред, все още може да се смята за сетивно възпринимаемо, за редица други множества, които можем да определим, положението е различно (например едва ли можем да считаме за сетивно възпринимаем обект множеството на онези слушатели, чиито фамилни имена започват с буквата А). Процесът на образуване на нови обекти обаче не завършва с образуването на множества от първоначални обекти. След като разширихме съвкупността на разглежданите обекти чрез добавянето на споменатите множества, към така получената разширена съвкупност можем отново да приложим подобна процедура на разширяване и да получим нова, още по-широка съвкупност. С нея можем да постъпим по аналогичен начин и т.н.

Тук е уместна още една забележка: Когато измежду обектите, допустими за разглеждане на даден етап, отделим множеството на онези, които имат дадено характеристично свойство, може да се случи да е трудно разпознаването, кои от обектите принадлежат на въпросното множество (т.е. притежават даденото свойство). Не считаме обаче това за пречка при разглеждането на споменатото множество, стига разпознаването да е поне принципно възможно. Може също да се случи даденото характеристично свойство да не се притежава от никой от допустимите обекти, но ние въпреки това си позволяваме да разглеждаме множеството, определено с това свойство, като казваме, че това множество е празно.

Разбира се, съвсем не е задължително първоначалните обекти при горната конструкция да бъдат безбройно много (например слушателите на сказката сигурно са краен брой). Нещо повече, конструкцията може да се осъществи даже когато няма нито един първоначален обект. В този случай все пак има едно множество от първоначални обекти — празното, тъй че след първото разширяване на съвкупността на допустимите обекти ще разполагаме с него. След второто разширяване ще разполагаме освен с празното множество с още едно друго множество — онова, за което единственият принадлежащ му обект е празното множество. Лесно се съобразява, че при следващото разширяване обектите, с които разполагаме, ще станат четири на брой; известни допълнителни разсъждения показват, че при още едно разширяване техният брой ще стане $2^4 = 16$, след това $2^{16} = 65\,536$ и т.н. Разбира се преди да броим колко са множествата, с които разполагаме в даден момент, би трябвало най-напред да уточним кога считаме, че две множества са равни, защото иначе въпросът за броя на наличните множества би бил неясно поставен. Общоприетото уславяне е, че две множества се считат равни точно тогава, когато обектите, принадлежащи на първото от тях, и обектите, принадлежащи на второто, са едни и същи.

За да улесним изказването и записването на нещата по-нататък, ще използваме още следните обичайни термини и означения: Обектите, които принадлежат на дадено множество, се наричат негови елементи. Ако a е (означение на) някакъв обект, а M е (означение на) някакво множество, то за да изразим, че обектът (означен с) a принадлежи на множеството (означено с) M, пишем $a \in M$, а за да изразим отрицанието на това твърдение, пишем $a \notin M$ (както е обичайно при използването на математическа символика, думите «означение на», «означен с», «означено с», заградени тук в скоби, ще бъдат системно пропускани по-нататък).

Изложената конструкция за пораждане на множества е такава, че дори и да тръгнем от краен брой (или даже от никакви) първоначални обекти, с нейна помощ можем да породим произволно много различни множества. Ако броят на първоначалните обекти е краен (в частност, ако той е равен на 0), допустимите обекти, породени при фиксиран краен брой прилагания на описаната процедура за разширяване, ще бъдат крайно много и следователно всяко множество от такива обекти ще има краен брой елементи. Оттук е ясно, че безбройно многото допустими обекти, които се получават, когато броят на прилаганията на процедурата расте неограничено, не могат да се съдържат едновременно в никое множество, получено след краен брой нейни прилагания За някои цели е достатъчен «свят на множествата», състоящ се само от споменатите безбройно много множества, всяко от които има краен брой елементи. Ако се ограничим с него, ще имаме работа с безкрайност, която е, тъй да се каже, потенциална — тъй като никои безбройно много допустими обекти, които могат да бъдат породени, не образуват множество, не е задължително да си ги представяме като едновременно съществуващи и образуващи едно цяло.

Теория на множествата, ограничаваща се с такъв «свят на множествата», за какъвто току-що стана дума, е достатъчно ясна и нейното използване едва ли крие някаква опасност. За съжаление тя обаче е недостатъчна за една голяма част от математиката, а именно за многобройните нейни дялове, в които съществено се използва наличието на безкрайни множества или, както често се казва, наличието на актуална безкрайност. За нуждите на тези дялове на математиката е подходящ много по-обширен «свят на множествата», който обаче се оказва и много по-необозрим. В съответната теория на множествата, която се опитва да го опише, идеята за актуално безкрайното наистина играе твърде важна роля. Трудовете на Кантор, в които той (през последните две-три десетилетия на 19 век) изгражда теорията на множествата, са направили на неговите съвременници най-силно впечатление именно с необикновено широкото използване на актуално безкрайни обекти.

* КАНТОР, Г. 1985. *Труды по теории множеств.* Москва, 1985, с. 173 (първият абзац на статията «К обоснованию учения о трансфинитных множествах», която е превод на: CANTOR, G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre . *Mathematische Annalen*, vol. 46, 1895, pp. 481—512; vol. 49, 1897, pp. 207— 246).

Според разясненията, които Кантор дава за своето разбиране на понятието множество, последното означава обединение в едно цяло на определени добре различими обекти на нашата интуиция или интелект.* Свободата да образуваме нови множества, която ни дава това разяснение, е изключително голяма. Например, ако започнем да изграждаме «света на множествата» чрез конструкцията, описана преди малко, мислено можем да обединим в едно цяло безбройно много и даже всички допустими обекти, които могат да се получат чрез краен брой прилагания на разгледаната процедура за разширяване (общо казано, различен за различните обекти). По този начин съвкупността на множествата, с които разполагаме, се допълва с безбройно много безкрайни множества. Разбира се, към така получената обширна съвкупност от допустими обекти можем отново да прилагаме неограничен брой пъти нашата процедура за разширяване. Можем освен това отново да правим стъпки, подобни на описаната по-горе, при които мислено се обединяват в едно цяло безбройно много обекти, получени на различни стадии на конструкцията.

Казаното дотук дава известна представа, колко е обширен Канторовият «свят на множествата» и какво изобилие на безкрайни множества има в него. При това не е задължително да се ограничаваме само с множества, построени чрез разгледаната конструкция. Можем да използваме и такива източници на безкрайни множества като аритметиката, анализа и геометрията, от които получаваме например множеството на целите числа, множеството на реалните числа и множеството на точките върху една права (дали това са наистина други източници е въпрос, който съвременната математика решава по-скоро в отрицателен смисъл, тъй като тя успешно моделира горните три теории в рамките на теорията на множествата и поради това споменатите три множества могат да се отъждествят с някои множества, получени чрез разгледаната процедура).

Особено забележителни са следните две постижения на Кантор в изградената от него теория на множествата: въвеждането на безкрайните кардинални числа и на трансфинитните числа. Чрез безкрайните кардинални числа може да бъде характеризирана многочислеността на елементите на произволни безкрайни множества, а трансфинитните числа позволяват в известен смисъл броене, което продължава след изчерпване на всички естествени числа. Ще се спра накратко на първото от тези две постижения.

Две крайни множества са еднакво многобройни, т.е. имат еднакъв брой елементи, точно тогава, когато между елементите на тези две множества може да се установи взаимно еднозначна съответствие. Последното условие има смисъл обаче не само за крайни, а и за произволни множества. Следвайки Кантор, да наречем две множества равномощни, когато между техните елементи може да се установи взаимно еднозначно съответствие. Естествено е да тълкуваме равномощността като еднаква многобройност на елементите на множествата. Оказва се обаче, че има голям брой неочаквани примери за равномощни безкрайни множества. Един такъв пример е бил посочен по същество още от Галилей, който през XVII в. е отбелязал, че може (по очевиден начин) да се установи взаимно еднозначно съответствие между положителните цели числа 1, 2, 3, 4, … и техните квадрати 1, 4, 9, 16, … , въпреки че последните представляват само част от първите (в известен смисъл даже незначителна част от тях). Кантор посочва още по-неочаквани примери за равномощни множества. Например той показва, че множеството на рационалните числа (съставено от положителните и отрицателните цели и дробни числа и нулата) е равномощно с множеството на целите числа, а също и с множеството на положителните цели числа. Това изглежда странно поради впечатлението, което имаме, че целите числа са съвсем незначителна част от всичките рационални числа. Друг, още по-неочакван пример, открит от Кантор, е следният: равномощни се оказват множеството на точките от равнината и множеството на точките върху една права. Ако обаче от тези примери стигнем до предположението, че всички безкрайни множества са равномощни, това ще бъде прибързано, защото пак Кантор доказва, че множеството на точките върху една права не е равномощно с множеството на целите числа. Той доказва също, че никое множество не е равномощно с множеството на своите подмножества (определението на понятието подмножество е следното: казваме, че множество *A* е подмножество на дадено множество *M*, когато всеки елемент на *A* принадлежи на *M*).

Разсъжденията, с които Кантор доказва последното твърдение, всъщност показват, че ако на всеки елемент от дадено множество *M* съпоставим някое подмножество на *M*, то непременно ще останат такива подмножества на *M*, които няма да бъдат съпоставени на никой елемент на *M*. Тези разсъждения са толкова кратки, че мога да си позволя да ги изложа тук.

Ето как изглеждат те: Нека на всеки елемент *x* на множеството

M е съпоставено подмножество A_x на M. Да означим с B множеството на онези елементи x на M, за които е изпълнено условието $x \notin A_x$ (т.е. на онези елементи на M, които не принадлежат на съответните им подмножества на M). Ще покажем, че множеството B (което по самото си определение е подмножество на M) е различно от всяко от множествата A_x, където $x \in M$. И наистина да допуснем, че $B = A_b$, където b е някой елемент на M. Според определението на B за всеки елемент x на M условието $x \in B$ е равносилно с условието $x \notin A_x$. От друга страна, условието $x \in B$ е равносилно и с условието $x \in A_b$. Следователно за всеки елемент x на M условието $x \in A_b$ е равносилно с условието $x \notin A_x$. В частност тези две условия трябва да бъдат равносилни и когато в качеството на x вземем елемента b. Това обаче дава, че условието $b \in A_b$ е равносилно с условието $b \notin A_b$, т.е. получаваме, че някакво твърдение е равносилно със своето отрицание. Това заключение е абсурдно*. Следователно направеното допускане е погрешно, т.е. множеството B е различно от всяко от множествата A_x, където $x \in M$.

Още в зората на човешката култура наблюденията върху равномощните и неравномощните сетивно възпринимаеми крайни множества са довели хората до понятието за брой на елементите на крайно множество и така са възникнали естествените числа. Кантор предлага понятието «брой на елементите» да се обобщи, като се приеме, че на всяко множество, не непременно крайно, отговаря един обект, наречен кардинално число или мощност на множеството, и че на две множества отговаря едно и също кардинално число точно тогава, когато те са равномощни. Едно кардинално число се нарича крайно, ако то отговаря на крайно множество, и безкрайно, ако отговаря на безкрайно множество. Крайните кардинални числа могат да бъдат отъждествени с естествените числа. От доказания преди малко резултат на Кантор лесно следва, че съществуват безбройно много различни безкрайни кардинални числа. Кантор, а

* Да допуснем, че едно твърдение s е равносилно със своето отрицание $\bar{s}$. Ако твърдението s е вярно, то поради тази равносилност ще се окаже вярно и $\bar{s}$, а това е противоречие. Следователно s не е вярно. Но тогава $\bar{s}$ е вярно, а това пак по допуснатата равносилност дава, че и s е вярно. И така, допуснатата равносилност на s и $\bar{s}$ води до противоречие и следователно е невъзможна.

след него и други математици изграждат своеобразна аритметика, работеща с тези числа. Измежду безкрайните кардинални числа особено важни са следните две: мощността $\aleph_0$ («алеф нула») на изброимите множества (каквито са множеството на естествените числа, множеството на целите числа, множеството на рационалните числа) и мощността *c* на континуума (каквато мощност имат множеството на точките върху една права, множеството на точките в равнината, множеството на реалните числа, множеството на всички множества от естествени числа и др.). Пред Кантор възниква следният естествен въпрос, известен като проблема за континуума: Може ли едно множество с мощност *c* да притежава безкрайно подмножество, чиято мощност да бъде различна както от *c*, така и от $\aleph_0$? Той полага много усилия да реши този въпрос, като предполага, че отговорът на въпроса е отрицателен (това предположение на Кантор носи името «хипотеза за континуума»). Усилията му обаче не се увенчават с успех и това днес не ни учудва, защото някои изследвания през последните пет-шест десетилетия показаха, че проблемата за континуума е в определен смисъл неразрешима (на тези въпрос ще се спра малко по-подробно към края на сказката).

Кантор е главният, но не единственият творец на теорията на множествата. Големи заслуги за нейното изграждане имат още немският математик Рихард Дедекинд (1831 — 1916 Richard Dedekind) и немският логик Готлоб Фреге (1848—1925 Gottlob Frege). Отначало отношението на повечето останали математици и логици към новата теория е скептично или даже враждебно, но през последното десетилетие на 19 век настъпва забележима положителна промяна. По това време мнозина започват да възлагат на теорията на множествата големи надежди относно бъдещите ѝ приложения в математиката и логиката. Тогава обаче започват да се забелязват някои сериозни неблагополучия във връзка с тази теория, а именно самият Кантор и италианският учен Чезаре Бурали-Форти (1861-1931 Cesare Burali-Forti) установяват, че ако в пълна степен се използва свободата за образуване на множества, която дава концепцията на Кантор, в теорията на множествата възникват логически противоречия. Известно време минава, без това обстоятелство да предизвика тъй силна реакция, както би трябвало да се очаква. Хората се надявали, че нещата ще могат да бъдат поправени с помощта на някои изменения от локален характер при изграждането на теорията. Положението се променя коренно през 1902 г. — тогава английският философ и логик Бертран Ръсел (Bertrand Russell) забелязва едно противоречие в теорията на множествата, което се получава с толкова елементарни средства, че не оставя почти никаква надежда да бъде отстранено без коренно изменение в самите основи на теорията. Това противоречие, известно като парадокс или антиномия на Ръсел, подкопава дълбоко доверието към теорията на множествата и слага началото на един дълъг кризисен период в изграждането и изследването на логическите основи на математиката. Самият Кантор все пак не загубва вярата си в бъдещето на създадената от него теория, но Дедекинд и Фреге са просто съкрушени от удара. Може да се каже, че и през изтеклите много десетилетия оттогава до днес въпреки многобройните лекарства, които са били предложени, за да се спаси теорията на множествата от забелязания тежък недъг, все още не е постигнато напълно задоволително разрешение на трудностите. Все пак някакъв изход от положението е намерен, макар и частичен, а може би и временен. Този изход се състои в създаването на някои аксиоматични системи за теорията на множествата, в които могат да се получат всички известни положителни резултати на тази теория, но поне досега не са възникнали противоречия. Най-известна е системата на Ернст Цермело (Ernst Zermelo), датираща от 1908 г.; с едно допълнение, направено от Абрахам Френкел (Abraham Fraenkel) през 1922 г., тя обслужва добре много от нуждите на съвременната математика и логика и остава най-употребяваната и в наши дни.

Както вече споменах, парадоксът на Ръсел се получава с твърде елементарни средства. Поради това няма пречки той да бъде изложен в настоящата сказка. Фактически разсъжденията, с помощта на които се получава противоречието при него, могат да се разглеждат като аналог (в известно отношение по-прост) на разсъжденията от доказателството, което изложих преди малко — че множеството на подмножествата на едно множество не е равномощно със самото множество. Да означим с B множеството на онези множества x, за които е изпълнено условието $x \in x$ (т. е. на онези множества, които не са елементи сами на себе си)*. Според определението на B за всяко множество x условието $x \in B$ е равносилно с условието $x \notin x$.

* Разбира се, на пръв поглед изглежда странна мисълта, че едно множество би могло да бъде елемент на самото себе си, но в края на краищата, ако това наистина е невъзможно, то всички множества ще принадлежат на B.

В частност тези две условия трябва да бъдат равносилни и когато в качеството на x вземем множеството B. Това обаче дава, че условието $B \in B$ е равносилно със своето отрицание $B \notin B$, а такава равносилност е невъзможна.

След като се запознахме с парадокса на Ръсел, добре е да видим как се избавя от този парадокс аксиоматичната система на Цермело – Френкел, за която вече стана дума. Начинът е такъв: чрез подходящо ограничение се осуетяват някои конструкции на множества и в частност конструкцията на множеството B от парадокса на Ръсел. Ограничението е, че вместо да можем за всяко свойство да образуваме множеството на всички обекти с това свойство, имаме следния по-слаб принцип: За всяко дадено свойство, изказано чрез използване само на понятия от теорията на множествата, и за всяко дадено множество M можем да образуваме множеството на онези елементи на M, които имат даденото свойство. Тъй като обаче това ограничение осуетява не само конструкцията на Ръселовото парадоксално множество, но и на много други, които (за разлика от него) са нужни на математиците, предлага се една частична компенсация: допълнително се разрешава конструкцията на някои специални множества като например множеството на подмножествата на произволно дадено множество. Формулира се специална аксиома, наречена аксиома за безкрайност, която гарантира съществуването на безкрайни множества. Така описаната аксиоматична система успешно се използва вече осем десетилетия. Опитът показва, че в нея могат по същество да се извършват всички разглеждания, които се правят в съвременната математика. Въпреки широкото и последователно използване на тази система и активното търсене на логическо противоречие в нея досега не се е стигнало до такова противоречие и има надежда, че изобщо не може да се стигне. Тъй да се каже, бихме могли да смятаме, че първоначалният «Канторов рай», трагично загубен вследствие на парадоксите, отчасти е възвърнат на математиците и логиците чрез споменатата аксиоматична система. Доколко обаче ще бъдем прави? Ще изредя няколко съображения, които могат да ни накарат да бъдем въздържани в това отношение.

Най-напред нека напомня, че ние наистина се надяваме системата на Цермело – Френкел да е логически непротиворечива, но нямаме основания да бъдем напълно сигурни в това. Не е абсолютно изключена възможността някое по-необичайно разсъждение, различно от онези, които досега са се срещали в математическите доказателства, да покаже в бъдеще наличието на противоречие и в тази система. Ако това се случи, отново ще се окажем в положението, в което са били привържениците на теорията на множествата, след като са узнали за парадокса на Ръсел. В първите десетилетия на 20 век Давид Хилберт предложи една програма, успешното изпълнение на която би ни дало абсолютна сигурност, че горната неприятност не може да се случи.* Програмата накратко е следната: логическата непротиворечивост на аксиоматичната система, която ни интересува, се формулира като математически въпрос и се търси безупречно математическо доказателство на твърдението, изразяващо непротиворечивостта на системата. Хилберт показа как може да се изпълни първата част от този план — формулирането на твърденията за непротиворечивост на различните аксиоматични системи като математически твърдения (това се постига чрез формализация на аксиоматичните системи). За втората част той предложи да се търсят доказателства, използващи силно ограничени логико-математически средства, които да гарантират пълната надеждност на доказателствата. В частност той предложи да не се използва в доказателствата идеята за актуално безкрайното. Постигнатите успехи в тази насока обаче са твърде частични даже и в случая на аксиоматични системи, значително попрости от системата на Цермело—Френкел, за които Хилберт предлага да се изпробва отначало неговата идея. Причината за недостатъчния успех на положените усилия се изяснява малко по-късно.

През 1931 г. Курт Гьодел доказва един прочут резултат, от който става ясна безнадеждността на опитите да се проведе програмата на Хилберт поне за такива силни системи като системата на Цермело—Френкел. Гьодел установява, че ако такава система е непротиворечива, то, грубо казано, тя не може да докаже своята собствена непротиворечивост**. Оттук се вижда, че доказателството на непротиворечивостта на системата на Цермело— Френкел не само не може да се извърши с онези ограничени логико-математически средства, за които говори Хилберт, но изобщо е задача, непосилна за съвременната математика. Това е така, защото, както отбелязахме, по същество всичко, което се прави в съвременната математика, може да се направи и в системата на Цермело—Френкел. Между другото

* Изложение на въпросната програма може да се намери в Приложения VII—X към книгата: ХИЛБЕРТ, Д. 1978. (David Hilbert) *Основи на геометрията*. София, 1978. (превод от: HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig — Berlin, 1930).

** Във връзка с този въпрос вж. съответната сказка на П. Петков.

по този начин виждаме и пример за математическа задача, която се формулира на езика на съвременната математика, но не е решима с нейните средства. Нещо повече, днес е известно, че въпросната математическа задача е равносилна с една математическа задача от твърде традиционен вид — а именно през 1970 г. съветският математик Юрий Матиясевич (Юрий Владимирович Матиясевич, Yuri Matiyasevich) доказа един резултат, чрез който реши отрицателно прочутата десета проблема на Хилберт*. Като се използва резултатът на Матиясевич, може да се покаже, че непротиворечивостта на системата на Цермело—Френкел е равносилна с несъществуването на решение в цели числа на едно конкретно (макар и доста сложно) алгебрично уравнение с цели коефициенти.** Да допуснем все пак най-вероятното — че системата на Цермело—Френкел е непротиворечива. Уви, и в такъв случай не можем да смятаме, че всичко около тази система е достатъчно благополучно. Най-сериозното неблагополучие, което е налице, е във връзка със семантиката (смисъла) на понятията и твърденията на въпросната система. Нека например някакво множество A е дефинирано като множеството на всички обекти от дадено множество M, които притежават дадено свойство. За да бъде определението на множеството A ясно, би трябвало това определение да дава поне принципна възможност да се познава кои обекти принадлежат на A. В действителност обаче имаме основание да се опасяваме от възникването на незавършващи рекурсивни процедури при прилагането на някое такова определение. Например, ако означим с A множеството на онези елементи x на M, конто удовлетворяват условието $x \notin x$, то условието $A \in A$ се оказва равносилно с конюнкцията на условията $A \in M$ и $A \notin A$. В такъв случай, за да решим въпроса, дали A принадлежи на A, като си служим с непосредствено прилагане на определението на A, би

* МАТИЯСЕВИЧ, Ю. В. 1970. Диофантовость перечислимых множеств. *Доклады АН СССР*, т. 191, 1970, с. 279—282. Популярно изложена информация на български език за този резултат може да се намери във: *Физико-математическо списание*, т.13, 1970, № 2, с. 155—157; т.14, 1971, №1, с. 82-87 и т.20, 1977, №3, с. 245-252, №4, с. 27-330

** Използва се и известният от математическата логика факт, че множеството на Гьоделовите номера на теоремите на една формална аксиоматична система е рекурсивно номеруемо (по повод на този факт вж. например края на § 3 от гл. 5 на: МЕНДЕЛЬСОН Э. *Введение в математическую логику*. Москва, 1984 (превод от: MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematic Logic*. Princeton—Toronto—New-York—London, 1964).

трябвало да решим два въпроса, вторият от които отново е дали A принадлежи на A. Ясно е, че по този път никога няма да получим неговия отговор.

В конкретния случай могат да се направят съвсем прости разсъждения, които водят до заключението, че A не принадлежи на A, а именно: допускането, че $A \in A$, води незабавно до противоречие (ако се опитаме да продължим тези разсъждения, вместо парадокс, подобен на този на Ръсел, получаваме само безобидното заключение, че $A \in M$). Няма никаква гаранция обаче, че винаги когато възникват подобни незавършващи рекурсивни процедури, непременно ще има аналогични други пътища за решаване на въпросите (мислете си например за случая, когато в горното определение на множеството A условието $x \notin x$ е заменено с условието $x \in x$).

Отбелязаната трудност е една от причините, поради които не се вижда как бихме могли да изградим «свят на множествата», за какъвто говори системата на Цермело — Френкел, и ни се налага, ако искаме да работим с нея, да приемем, че такъв «свят»-е вече изграден (едва ли не от бога или боговете!). Препятствието, което срещаме при опит да изградим «света на множествата», не е случайно — то е тясно свързано с вече споменатата изключителна трудност на задачата за доказване непротиворечивостта на системата на Цермело — Френкел. Изглежда, че достатъчно ясна семантика за тази система не би могла да се даде в настоящия момент, понеже тази семантика би позволила да се докаже непротиворечивостта на системата.

В още едно отношение системата на Цермело — Френкел е далеч от това, което би желал например Кантор. През 1963 г. американският математик Пол Коен (Paul Joseph Cohen) установи, че ако тази система е непротиворечива, не е възможно с нейни средства да бъде доказана хипотезата за континуума, а около 25 години преди това К. Гьодел е показал, че по същия начин стои въпросът и с отрицанието на тази хипотеза.* Резултатите на Гьодел и Коен показват, че ако системата на Цермело — Френкел е непротиворечива, то тя описва едновременно съществено различни «светове на множествата», като в

* КОЭН, П. Д ж. 1969. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* Москва, 1969 (превод от: COHEN, P. J. 1966. *Set Theory and Continuum Hypothesis*. New York — Amsterdam, 1966) или КОЕН, П. Д ж.и Р. ХЕРШ. Неканторова теория на множествата. — *Физ.-мат. спис.*, т.12, 1969, № 4, с. 299—316 (превод от: COHEN, P. J. and R. HERSH. Non-Cantorian set theory. *Scientific American*, vol. 217, 1967, pp. 104—116).

някои от тези «светове» хипотезата за континуума е вярна, а в други не е (следователно системата не ги различава един от друг, а значи и не описва пълно никой от тях). Ако всеки такъв «свят» считаме за «рай», положението започва да прилича на това с различните религии, всяка от които си има свой рай, различен от рая на другите. Ако ли пък вярваме в някакъв абсолютен (истински) «свят на множествата», очевидно аксиомите на Цермело—Френкел не са достатъчни за неговото пълно описание. Едва ли обаче някой има достатъчно ясна представа за такъв абсолютен «свят», защото никакви достатъчно убедителни предложения за разширяване на списъка на тези аксиоми не са направени. Вероятно «истинският свят на множествата» не може да бъде друго освен една илюзия и възниква въпросът, дали трябва математиката и логиката да се основават на нея. По този въпрос няма единодушно мнение. Опитът ни учи, че някои илюзии са се оказвали плодотворни, и както изглежда, такова е положението и с представата за абсолютен «свят на множествата». Като вземем предвид, че във всеки случай системата на Цермело—Френкел не влиза в противоречие с такава представа (поне ако тази система е непротиворечива) и същевременно поставя на достатъчно твърда основа работата с множества, можем да смятаме, че за повечето математици въпросната представа е поне безвредна, ако в своята работа те се основават по същество на Цермело - Френкеловата система (или на някоя друга подобна аксиоматична система). Застъпва се обаче настойчиво и становището, че математическите резултати, получени с използването на теория на множествата с неизяснена семантика, нямат гарантирана реална осмисленост и практическа ценност, а когато те наистина имат, често явление е при тяхното получаване теорията на множествата да е използвана в много малка степен. Привържениците на това становище предлагат и разработват съответни по-реалистични подходи за развитието на математиката и логиката. Можем да се надяваме, че бъдещето ще внесе повече яснота по възникналите спорни въпроси и евентуално ще бъдат предложени и нови пътища за преодоляване на трудностите във връзка с изграждането и използването на теорията на множествата.

Ще завърша с един методологически извод от досегашното развитие на теорията на множествата: в логическата дейност на човека опитът играе твърде голяма роля. И наистина възникването и първоначалното развитие на теорията на множествата са били в голяма степен резултат на свободна творческа дейност, но веднъж възникнала, по-нататъшният път на тази теория е много силно повлиян от сблъсъка ѝ с действителността посредством опита за усъвършенстване и използване на теорията. В основни линии това не е опит в смисъл на сравняване на получените резултати с действителното положение на нещата (не е даже съвсем ясно дали може да се говори за такова в случая). По-скоро това е опит от рода на онзи, чрез който производителят на сечива установява тяхната годност или негодност или по-общо обхвата на тяхната използваемост. Теорията на множествата е преди всичко едно сечиво в ръцете на математиците и логиците, а качествата на сечивата се преценяват най-добре при тяхната употреба.

Лудвиг Витгенщайн

ЛЕКЦИЯ ПО ЕТИКА*

Преди да започна да говоря по моята тема, разрешете ми да направя няколко уводни забележки. Чувствам, че ще имам големи затруднения да ви предам своите мисли, и смятам, че някои от тези затруднения могат отчасти да се преодолеят, ако предварително ги спомена пред вас. Първото, което едва ли е нужно да споменавам, е, че английският не е моят роден език и следователно моят изказ е лишен от прецизността и финеса, които биха били желателни, щом се говори по трудна тема. Всичко, което мога да направя, е да ви помоля да облекчите моята задача, като се опитате да стигнете до това, което имам предвид, въпреки прегрешенията, които постоянно ще правя спрямо английската граматика. Второто затруднение, което ще спомена, е това, че вероятно мнозина от вас са дошли на тази моя лекция с донякъде погрешни очаквания. И за да поправя тази грешка, ще кажа няколко думи за причината да избера темата, която съм избрал: Когато вашият бивш секретар ме почете с молбата да изнеса някакъв доклад пред вашето дружество, моята първа мисъл беше, че аз положително ще сторя това, а моята втора мисъл беше, че след като имам случая да ви говоря, ще говоря за нещо, което силно желая да ви съобщя, и че няма да злоупотребя с този случай, като ви прочета лекция, да речем, по логика. Аз наричам това злоупотреба, защото, за да ви се обясни някаква научна материя, е нужен не едночасов доклад, а курс от лекции. Друга възможност би било да ви предложа това, което се нарича научно-популярна лекция, тоест лекция, която цели да ви накара да вярвате, че разбирате нещо, което всъщност не разбирате, и

* Ludwig Wittgenstein (1889 — 1951) Тази лекция, непубликувана досега, била приготвена за изнасяне от Витгенщайн по времето между септември 1929 и декември 1930г. Вероятно тя е била четена пред дружеството, известно като «Еретиците», пред което Витгенщайн е изнасял някакъв доклад по това време. Ръкописът няма заглавие. Доколкото е известно, това е единствената популярна лекция, съчинена или изнесена някога от Витгенщайн. (Преводът е направен по първата публикация на текста в WITTGENSTEIN, L. 1965. Lecture on Ethics, *The Philosophical Review*, vol. 74, № 1, 1965, pp. 3 — 12. — *Бел. прев.)*

да задоволи онова, което аз смятам за една от най-низките страсти на съвременните хора, а именно повърхностното любопитство към последните открития на науката. Аз отхвърлих тези възможности и реших да ви говоря по една тема, която ми се струва, че е от всеобщо значение, с надеждата, че това може да помогне за изясняването на вашите мисли по тази тема (дори ако вие изцяло не се съгласите с това, което аз ще ви кажа по нея). Третото ми и последно затруднение всъщност е характерно за по-многословните философски лекции и е това, че слушателят не е в състояние да види едновременно и пътя, по който е поведен, и целта, към която пътят води. Иначе казано, той си мисли или «Аз разбирам всичко, което той казва, но накъде за бога той бие», или пък «Аз виждам накъде той бие, но как за бога се кани да стигне дотам». Всичко, което мога да направя, е отново да ви помоля да бъдете търпеливи и се надявам, че в края ще видите п пътя, и накъде той води.

Сега вече ще започна. Моя тема, както знаете, е етиката и аз ще приема тълкуването, което професор Мур (George Edward Moore) е дал на този термин в своята книга *Principia Ethica.* Той казва: «Етиката е общото изследване какво е добро.» Но аз ще използвам термина етика в малко по-широк смисъл, в смисъл, който всъщност включва това, което аз мисля, че е най-съществената част от онова, което обикновено се нарича естетика. И за да ви накарам да видите възможно най-ясно какво приемам за предмет на етиката, ще ви предложа няколко повече или по-малко синонимни израза, всеки от които може да замести горното определение и като ги изреждам, искам да постигна ефект от типа на този, който постига Галтън (Francis Galton), когато прави няколко снимки на различни лица върху една и съща фотографска плака, за да получи образа на типичните черти, общи за всички тях. И както с демонстрирането на такава колективна снимка мога да ви накарам да видите какво е типичното — да речем — китайско лице, така, ако проследите поредицата от синоними, която ще ви предложа, надявам се ще можете да видите характерните черти, общи за всички тях, и това са характерните черти на етиката. Така вместо да кажа: «Етиката е изследването какво е добро» можех да кажа: «Етиката е изследването какво е ценно или какво е действително важно» или «Етиката е изследване на смисъла на живота или на това, което осмисля живота, или на правилния начин на живот». Вярвам, че ако погледнете всички тези фрази, ще получите груба представа какво е това, към което се отнася етиката. И първото, с което човек се сблъсква при всички тези изрази, е, че всеки от тях всъщност се употребява в два много различни смисъла. Аз ще ги нарека тривиален или относителен смисъл, от една страна, и етически или абсолютен смисъл, от друга. Ако например кажа, че това е *добър* стол, това означава, че столът обслужва някакво предопределено намерение и думата *добър* тук има значение единствено доколкото това намерение е било предварително установено. Наистина думата *добър* в относителния смисъл просто означава доближаване до някаква предопределена мярка. Така, когато казваме, че този човек е добър пианист, ние имаме предвид, че той може да свири неща от определена степен на трудност с определена степен на сръчност. Аналогично, ако кажа, че е *важно* за мен да не се простудя, аз имам предвид, че простудяването довежда до определени подлежащи на описание смущения в моя живот, и ако кажа, че това е *правилният* път, имам предвид, че това е правилният път относно определена цел. Така употребени, тези изрази не създават никакви трудни или дълбоки проблеми. Но не така ги употребява етиката. Да предположим, че мога да играя тенис, а някой от вас ме е видял да играя и е казал: «Е, ти играеш много лошо». И да предположим, че аз съм отговорил «Знам, че играя лошо, но аз изобщо не искам да играя по-добре». Всичко, което другият би могъл да каже, би било: «А, тогава всичко е наред.» Но предположете, че съм казал някому от вас нелепа лъжа и той е дошъл при мен и е казал: «Ти се държиш като животно», а аз съм отговорил: «Знам, че се държа лошо, но аз изобщо не искам да се държа по-добре.» Тогава би ли могъл той да каже: «А, тогава всичко е наред»? Положително не; той би казал: «Е, ти *трябва* да искаш да се държиш по-добре.» Тук вие имате едно абсолютно съждение за ценност, докато първият пример беше пример за относително съждение. Същината на разликата мисля, че очевидно е тази: Всяко съждение за относителна ценност е просто излагане на факти и следователно може да бъде представено в такава форма, че съвсем да загуби облика си на съждение за ценност. Вместо да кажа: «Това е правилният път за Гранчестер (Grantchester - село на река Кам в графство Кеймбридж)», със същия успех можех да кажа: «Това е правилният път, по който трябва да вървите, ако искате да стигнете в Гранчестер за най-кратко време». «Този човек е добър бегач» просто означава, че той пробягва определен брой мили за определен брой минути и т.н. Така това, което аз искам да утвърдя, е, че макар и да може да се покаже, че всяко съждение за относителна ценност е просто излагане на факти, никое излагане на факт няма да може никога да бъде или да предполага съждение за абсолютна ценност. Нека обясня това: Предположете, че някой от вас е всезнаещ човек и следователно знае всички движения на всички тела в света — мъртви или живи, и че също така той знае всички душевни състояния на всички живи човешки същества, които някога са живели, и предположете, че този човек напише всичко, което знае, в една голяма книга. Тогава тази книга ще съдържа пълното описание на света; и това, което аз искам да кажа, е, че тази книга няма да съдържа нищо, което бихме могли да наречем *етическо* съждение или нещо, което логически би предполагало такова съждение. Тя, разбира се, ще съдържа всички относителни съждения за ценност и всички верни научни твърдения и всъщност всички верни твърдения, които могат да се съчинят. Но всички описани факти като че ли ще бъдат на едно и също ниво. Няма твърдения, които — в някакъв абсолютен смисъл — са възвишени, важни или тривиални. Сега може би някой от вас ще се съгласи с това и ще си спомни думите на Хамлет: «Няма нищо, добро или лошо, което да не е направено такова от нашето мислене.»* Но това може отново да доведе до недоразумение. Казаното от Хамлет като че ли предполага, че добро или лошо — макар и не качества на света вън от нас — са свойства на нашите душевни състояния. Но аз мисля, че едно душевно състояние, доколкото под това разбираме факт, който можем да опишем, в никакъв етически смисъл не е добро или лошо. Ако, например, в нашата световна книга прочетем описанието на едно убийство с всичките му физически и психологически особености, чистото описание на тези факти няма да съдържа нищо, което бихме могли да наречем етическо твърдение. Убийството ще бъде точно на същото ниво като всяко друго събитие, например падането на камък. Четенето на това описание положително може да предизвиква у нас болка или гняв или някакво друго чувство, или пък можем да прочетем за болка или гняв, предизвикани от това убийство у други хора, когато те са чули за него, но това просто ще бъдат факти, факти и само факти, но не и етика. И сега трябва да кажа, че ако размишлявам какво трябва да бъде всъщност етиката, ако имаше такава наука, този резултат ми се струва съвсем очевиден. Струва ми се очевидно, че никое от нещата, които някога можем да помислим

* Преводът е на Валери Петров — *Бел. прев*

или кажем, няма да бъде *това* нещо; че ние не можем да напишем научна книга, предметът на която би могъл да бъде вътрешно възвишен и над всички други предмети. Аз мога само да опиша моето чувство с метафората, че ако човек можеше да напише книга по етика, която действително да бъде книга по етика, тази книга с взрив би унищожила всички други книги в света. Нашите думи, както ги употребяваме в науката, са съдове, които могат само да съдържат и пренасят значение и смисъл — *естествено* значение и

естествен смисъл. Етиката, ако тя е нещо, е свръхестествена, а нашите думи изразяват само факти; както чашата за чай побира само една чаена чаша вода дори ако излея един галон върху й. Казах, че що се отнася до факти и твърдения, има само относителна ценност и относително добро, справедливо и т.н. И преди да продължа, нека илюстрирам това с един доста очевиден пример. Правилният път е пътят, който води към произволно предопределен край и за всички нас е съвсем ясно, че няма смисъл да се говори за правилен път вън от такава предопределена цел. Но нека видим какво е възможно да имаме предвид с израза «абсолютно правилният път». Аз мисля, че това ще бъде пътят, който *всеки* — щом го съзре — ще трябва да поеме *с логическа необходимост* или ще се срамува да не поеме. И аналогично *абсолютното добро,* ако то е подлежащо на описание положение на нещата, ще е нещо, което всеки независимо от своите предпочитания и наклонности *с необходимост* ще извърши или ще се чувства виновен, ако не извърши. И искам да кажа, че такова положение на нещата е химера. Никое положение на нещата не притежава само по себе си това, което бих искал да нарека принудителната сила на абсолютен съдник. Тогава какво имаме всички ние, които — както и аз — се изкушаваме все пак да използваме такива изрази като «абсолютно добро», «абсолютна ценност» и т. н., какво имаме всички ние наум и какво се опитваме да изразим? Винаги когато се опитвам да изясня това на себе си, естествено е да си спомням случаи, когато положително бих използвал тези изрази, и тогава аз съм в ситуацията, в която бихте изпаднали, ако например аз трябваше да ви изнеса лекция по психология на удоволствието. Тогава вие бихте се постарали и бихте си спомнили някоя типична ситуация, в която винаги чувствате удоволствие. Защото с такава ситуация наум всичко, което аз бих ви казал, би станало конкретно и като че ли контролируемо. И вероятно някой би избрал за свой опорен пример усещането при разходка в хубав летен ден. Сега аз съм в тази ситуация, като искам да се спра на това, което означавам с абсолютна или етическа ценност. И с мен винаги става така, че представата за един отделен опит е у мен и той следователно е в известен смисъл моят опит *par excellence* и това е причината, когато ви говоря сега, да използвам този опит като водещ пример. (Както казах и преди, това е съвсем личен въпрос и други биха намерили други примери за по-поразителни.) Аз ще опиша този опит, за да ви накарам, ако е възможно, да си припомните същите или подобни опити и така да намерим обща основа за нашето изследване. Струва ми се, че най-добре ще го опиша, ако кажа, че когато го имам, *аз се учудвам на съществуването на света.* И тогава съм склонен да употребя фрази като «колко е необикновено, че нещо изобщо съществува» или «колко е необикновено, че светът изобщо съществува». Веднага ще спомена и друг опит, който също познавам и който може би е известен и на други от вас: той може да се нарече опит от усещането за *абсолютна* безопасност. Имам предвид душевното състояние, в което човек е склонен да каже: «В безопасност съм, каквото и да се случи, нищо не може да ме засегне.» Нека сега разгледаме тези опити, защото мисля, че те представят именно характеристиките, които сме се захванали да си изясним. И първото, което трябва да кажа, е, че словесният израз, който даваме на тези опити, е безсмислица! Като казвам «Учудвам се на съществуването на света», аз злоупотребявам с езика. Нека обясня това: Съвсем хубав и ясен смисъл има в изказването, че се учудвам на нещо, което е така и така. Ние всички разбираме какво значи да се каже, че аз се учудвам на размерите на куче, по-голямо от всяко друго, което преди съм виждал, или на всяко нещо, което във всекидневните представи на света е необикновено. Във всеки случай аз се учудвам, че нещо е така и така, ако *мога* да си представя то да *не* бъде така. Учудвам се на размерите на това куче, защото бих могъл да си представя куче с други, а именно нормални размери, на които не бих се учудил. Има смисъл да кажа: «Учудвам се, че нещо си е така и така», само ако мога да си представя то да не бъде така. В този смисъл човек може да се учудва на съществуването, да речем, на една къща, когато я види след дълго отсъствие, а си е представял, че тя е съборена междувременно, но е безсмислица да кажа, че се учудвам на съществуването на света, защото не мога да си го представя несъществуващ. Мога, разбира се, да се учудвам на заобикалящия ме свят, че е такъв, какъвто е. Ако например съм имал този опит, когато гледам синьото небе, аз мога да се учудвам на небето, че е синьо, противно на случая, в който то е облачно. Но не това имам предвид. Аз се учудвам на небето, че то е *каквото и да е.* Някой би се изкушил да нарече онова, на което се учудвам — а именно че небето е синьо или не е синьо, — тавтология. Но тогава просто е безсмислица да се каже, че някой се учудва на тавтология. Същото важи и за другия опит, който споменах — опита от абсолютна безопасност. Всички знаем какво значи във всекидневния живот да си в безопасност. В безопасност съм в стаята си, когато не може да ме прегази автобус. В безопасност съм, ако вече съм карал магарешка кашлица и значи не мога да я хвана пак. Да бъда в безопасност всъщност означава, че е физически невъзможно някакви неща да ми се случат и следователно е безсмислица да кажа, че съм в безопасност *каквото* и да се случи. Тук имаме пак злоупотреба с думата «безопасност», докато другият пример беше злоупотреба с думата «съществуване» или «учудване». Така искам да ви внуша, че някои характерни злоупотреби с нашия език пронизват *всички* етически и религиозни изрази. Всички тези изрази *изглеждат,* prima facie, просто *сравнения.* Така, като употребяваме думата *справедливост* в етически смисъл, макар и да нямаме предвид справедливост в тривиалния смисъл, все пак изглежда да е в някакъв подобен; и като казваме «Това е добър човек», въпреки че «добър» тук не означава същото, което и в изречението «Това е добър футболист», изглежда да има някаква прилика. И като казваме «Животът на този човек беше ценен», нямаме предвид смисъла, в който говорим за някое ценно бижу, но изглежда да има някаква прилика. В този смисъл всичко в религиозния език изглежда да се употребява като сравнение или пък алегорично. Защото, когато говорим за Бог и че той вижда всичко и когато коленичим и му се молим, всички наши думи и действия приличат на части от една голяма и сложна алегория, която го представя като човешко създание с огромна мощ и чието благоволение се опитваме да спечелим и т.н., и т.н. Но тази алегория също описва опитите, на които току-що се позовах. Защото струва ми се първият от тези опити е точно онова, на което хората са се позовали, когато са казали, че Бог създаде света, и опитът от абсолютна безопасност е бил описан чрез изказването, че ние се чувстваме в безопасност в Божиите ръце. Трети опит от същия вид е да се чувстваш виновен и отново това е било описано с израза, че Бог не одобрява нашето поведение. Така в етическия и религиозния език ние като че ли постоянно използваме сравнения. Но едно сравнение трябва да бъде сравнението за *нещо*. И ако мога да опиша един факт с помощта на сравнение, аз трябва също така да мога да захвърля сравнението и да описвам фактите без него. В нашия случай опитаме ли да захвърлим сравнението и просто да изложим фактите зад него, ние намираме, че няма такива факти. И така, онова, което отначало беше сравнение, сега изглежда да е чиста безсмислица. Трите опита, които ви споменах (а можех да добавя и още), изглеждат за тези, които са ги изпитали — за мен например, като имащи в някакъв смисъл истинска, абсолютна ценност. Но като казвам, че те са опити, те със сигурност са факти; случили са се там и тогава, траяли са определено време и следователно могат да се опишат. И така, заради онова, което казах преди няколко минути, аз трябва да приема, че е безсмислица да се каже, че те имат абсолютна ценност. Ще уточня още повече мисълта си, като кажа: «Парадоксът е там, че един опит, един факт изглежда със свръхестествена ценност.» Има един начин, по който се блазня да посрещна този парадокс. Нека най-напред разгледам отново нашия първи опит — учудването от съществуването на света, и нека го опиша малко по-иначе; ние всички знаем какво в обикновения живот се нарича чудо. Очевидно това просто е събитие, подобно на което не сме виждали никога преди. Сега допуснете, че такова събитие се случи. Да кажем, някому от вас изведнъж порасне лъвска глава и започне да ръмжи. По-необикновено нещо аз сигурно не мога да си представя. Тогава, щом се отърсим от изненадата си, бих предложил да доведем доктор и да подложим случая на научно изследване — ако не беше болезнено, бих направил вивисекция. И къде се дяна чудото? Защото е ясно, че като го разглеждаме по този начин, всичко чудесно е изчезнало, освен ако не означаваме с тази дума това, че един факт още не е обяснен от науката, което пък значи, че досега не сме успели да групираме този факт с други в една научна система. Това показва, че е абсурдно да се каже: «Науката е доказала, че няма чудеса.» Истината е, че научният начин да се разглежда един факт не е начинът, по който се гледа на него като на чудо. Защото — представете си какъвто си искате факт — сам по себе си той не е чудесен в абсолютния смисъл на тази дума. Защото сега виждаме, че сме ползвали думата «чудо» в относителен и в абсолютен смисъл. И аз ще опиша сега опита с учудването от съществуването на света, като кажа: «Това е опитът да виждаш света като чудо.» И се изкушавам да кажа, че в езика правилното изразяване на чудото, че светът съществува — макар то да не е никакво твърдение *в* езика, — е съществуването на самия език. Но тогава какво значи да усещаме това чудо в едни случаи, а в други не? Защото всичко, което казах, като изместих изразяването на чудесното от изразяване *със средствата на* езика към изразяване *чрез съществуването* на езика, всичко, което казах, е пак, че не можем да изразим това, което искаме да изразим, и че всичко, което *казваме* за абсолютно чудесното, си остава безсмислица. Отговорът на всичко това ще изглежда съвсем ясен за мнозина от вас. Вие ще кажете: Добре, ако определени опити постоянно ни изкушават да им приписваме качество, което наричаме абсолютна или етическа ценност и значимост, това просто показва, че с тези думи ние *нямаме* предвид безсмислица, че в последна сметка, когато казваме за някакъв опит, че той има абсолютна ценност, това, което имаме предвид, *е само факт, подобен на други факти,* и че всичко, до което това води, е, че ние все още не сме успели да намерим коректния логически анализ на това, което имаме предвид с нашите етически и религиозни изрази. И когато това се изтъкне срещу мен, аз отведнъж виждам ясно като в светлината на прожектор не само, че никое описание, за което мога да си помисля, не би позволило да се опише какво имам предвид под абсолютна ценност, а и всяко значещо описание, което някой може да предложи, бих отхвърлил, *ab initio,* въз основа на това, че то има значение. Тоест: Виждам сега, че тези безсмислени изрази са били безсмислени не поради това, че аз все още не съм открил коректните изрази, а че тяхната безсмисленост е самата им същност. Защото всичко, за което те са ми трябвали, е просто да *мина отвъд* света, и, иначе казано, отвъд значещия език. Целият ми стремеж и, вярвам, стремежът на всички хора, които някога са опитвали да пишат или говорят за етика или религия, беше да се блъскам о границите на езика. Това блъскане о стените на нашата клетка е напълно, абсолютно безнадеждно. Етиката, доколкото тя произлиза от желанието да се каже нещо за върховния смисъл на живота, абсолютното добро, абсолютно ценното не може да бъде наука. Това, което тя казва, не добавя нищо към нашето познание. Но тя е документ за един стремеж на човешкия дух, който аз лично не мога да не уважавам дълбоко и с цената на живота си не бих принизил.

СВОБОДНА ДИСКУСИЯ*

Въпрос. *Тъй като компютрите, изглежда, биха могли да ограничат общността на алгоритмиката, не смятате ли неизбежната връзка между двете за злополучна?*

Отговор. Всъщност някой беше казал, че да наречем въпросната област «компютърна наука» е все едно да се отнесем към хирургията като към «наука за ножа». Но и така да е, без тази връзка алгоритмиката никога нямаше да се развие по този начин. Почти единодушно е обаче мнението, че терминът «компютърна наука» е подвеждащ и че нещо като «наука за информацията», «наука за процесите» или «наука за дискретното» би било по-подходящо. Можем да се измъкнем и като кажем, че нашата проблематика — алгоритмиката, образува само «подпората» на «компютърната наука», без да я замества.

Въпрос. *Как звучи оригиналната формулировка на теоремата на Гьодел за непълнота?*

Отговор. Теоремата на Гьодел се появява като твърдение VI в статията му от 1931 г. «Върху формално неразрешимите твърдения в *Principia Mathematica* и сродни системи I».

Тя гласи:

На всеки ω-непротиворечив рекурсивен клас *k* от *формули* съответстват рекурсивни *означения на класове r* такива, че нито υ Gen *r*, нито Neg (υ Gen *r*) принадлежи на Flg (*k*) (където υ е *свободната променлива* на *r*.

Всъщност тя е формулирана на немски и може би ще ви се стори, че и в този вид звучи като на немски. Ето една перифраза на по-нормален език:

Всички свестни аксиоматични формулировки на теорията на числата съдържат неразрешими твърдения.

Въпрос. *Може ли цялата реалност да бъде превърната във формална*

* Или по-точно: *Въпроси и отговори за смисъла на живота*, извлечени от книгите: HAREL, David. *Algorithmics: The spirit of Computing*. Addison — Wesley, 1987; HOFSTADTER, Douglas. *1979. Goedel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Penguin Books, 1979. — Бел. съст.

система?

Отговор. В много широк смисъл отговорът сякаш е «да». Би могло например да се каже, че самата действителност не е нищо повече от една много сложна формална система. Нейните символи се разполагат не върху хартия, а по-скоро върху тримерен вакуум (пространство); това са елементарните частици, от които всичко е съставено (приемаме негласно, че низходящата верига на материята има край, така че изразът «елементарни частици» не е безсмислен). «Правилата за извод» са законите на физиката, които показват как да променим дадените положения и скорости на всички частици в даден момент така, че в резултат да се получат нови положения и скорости, принадлежащи на «следващия» момент. И така теоремите на тази огромна формална система са възможните конфигурации на частиците в различни моменти от историята на Вселената. Единствената аксиома е (или може би *е била)* изходната конфигурация на всички частици в «началото на времето». Това обаче е толкова грандиозно понятие, че представлява изключително само теоретичен интерес, а освен това квантовата механика (а и други дялове на физиката) поставя под известно съмнение дори и теоретичната ценност на тази идея. Тук всъщност питаме дали Вселената оперира детерминистично, а това е един открит въпрос.

Въпрос. *Ще пишат ли някога компютърните програми красива музика?*

Отговор. Да, но няма да е скоро. Музиката е език на емоциите, а преди програмата да добие емоции — сложни като нашите, тя не би могла да напише нищо красиво. Може да има «фалшификации» — бледи имитации на синтаксиса на по-рано създадена музика, но макар и това да не е ясно от пръв поглед, музикалните изрази съдържат много повече от онова, което може да бъде уловено в синтактични правила. Компютърните програми, композиращи музика, няма скоро да ни зарадват с нови видове красота. Ще доразвия тази мисъл: Да се мисли — а подобни мнения съм чувал, — че скоро за двадесет долара ще можем да си поръчваме по пощата предварително програмирани настолни «музикални кутии» — серийно производство, и че техните *стерилни електровериги* ще раждат пиеси, които биха могли да бъдат написани от Шопен или Бах, ако бяха живели по-дълго, е нелепо и срамно недооценяване на дълбочината на човешкия дух. Една програма, която може да създава музика като тяхната, ще трябва да може да броди сама по света, да си проправя с борба пътя през лабиринтите на живота, като преживява всеки миг. Тя ще трябва да разбира радостта и самотата на студения нощен вятър, копнежа по ръката на любим човек, недостижимостта на далечния град, болката и спомена след една човешка смърт. Тя ще трябва да е изпитала примирението и овехтяването от живота, тъга и отчаяние, решимост и победа, благочестие и благоговение. В нея ще трябва да се смесват полюси като надежда и страх, страдание и ликуване, спокойствие и очакване. Неотлъчно от нея ще трябва да е чувството за хумор, за прекрасно, за ритъм, усет за неочакваното и, разбира се, изящното познание за магията на едно ново творение. Тук и само тук са изворите на значение в музиката.

Въпрос. *Емоциите ще бъдат ли някога експлицитно програмирани в машина?*

Отговор. Не. Това е смешно. Никое пряко симулиране на емоции не може да се доближи до сложността на човешките емоции, които са следствие от организацията на нашия ум. Програмите или машините ще се сдобият с емоции по същия начин: като странични продукти на структурата и организацията си, а не чрез пряко програмиране. Така например никой няма да напише подпрограма «влюбване», както няма да напише и подпрограма за «правене на грешки». «Влюбване» е името, което даваме на един сложен процес от една сложна система, но не е казано, че отделен модул сам ще отговаря за него.

Въпрос. *Ще може ли един мислещ компютър да събира бързо?* ***Отговор.*** Може би не. Самите ние сме съставени от хардуер, който извършва завързани сметки, но това не означава, че символното ни ниво — където сме «ние» — знае как да извършва същите тези завързани сметки. Иначе казано, няма как да заредите с числа собствените, си неврони, така че да изчислят сметката при бакалина. За ваше щастие символното ви ниво (т.е. *вие)* няма достъп до невроните, които извършват мисленето — иначе би ви се размекнал мозъкът. Перифразирайки Декарт:

«Cogito, ergo няма достъп до нивото, където sum-ирам.» Защо това да не е така и за една интелигентна програма? Не трябва да се допуска тя да има достъп до веригите, които осъществяват мисленето ѝ, иначе много сериозно би ѝ се размекнал процесорът; машина, способна да издържи теста на Тюринг (Alan Turing), може да не смята по-бързо от мен или вас, и то по същите причини. Тя ще представя числото 2 не просто с двата бита «10», а като пълноправно *понятие*

— както го представяме ние заедно с множество асоциации: думите «двойка» и «чифт», куп мисловни образи, като например точките на доминото, формата на числото «2», понятията алтернация, четност, нечетност и т.н., и т.н. С целия този «свръхбагаж», който носи, една интелигентна програма ще стане доста мудна в смятането. Разбира се, бихме могли да ѝ дадем нещо като джобен калкулатор (или да ѝ вградим такъв). Тогава тя ще отговаря много бързо, но ефективността ѝ ще бъде същата като на човек с джобен калкулатор. Машината ще се състои от две отделни части: една напълно надеждна, но безмозъчна част, и една интелигентна, но не така прецизна част. На надеждността на такава съставна система не може да се разчита, не е непременно надеждна и система, съставена от човек и машина, така че, ако ви трябват верни отговори, най-добре се отнасяйте само до джобния си калкулатор — не търсете интелект!

Въпрос. *Ще има ли шахматни програми, побеждаващи всекиго?*

Отговор. Не. Може да се появят програми, които да могат всекиго да победят на шах, но това няма да са само шахматни програми. Това ще бъдат общоинтелигентни програми и те ще бъдат също така темпераментни като хората. «Искаш ли да играем шах?» — «Не, шахът ми дотегна. Да поговорим за поезия.» Подобен диалог може да очаквате с всепобеждаващата програма. Това е, защото истинската интелигентност неизбежно зависи от способността за «общ поглед отвън», т.е. програмирана способност да се надскочи системата, поне приблизително колкото и ние имаме тази способност. Щом веднъж това е налице, вече не можете да удържите програмата: тя е преминала критичната точка и просто ще трябва да се изправите пред фактите на творението си.

Въпрос. *Ще има ли специални зони в паметта за съхраняване на параметри, управляващи поведението на програмата, така че ако «бъкнете» и ги промените, да направите програмата по-умна или по-глупава, или по-творческа, или по-увлечена от бейзбол? С две думи, ще бъде ли възможно да се «настройва» програмата, като се «бърника» на едно сравнително ниско ниво?*

Отговор. Не. Тя никак няма да се влияе от промени в които и да са определени елементи в паметта, както и ние си оставаме абсолютно същите, независимо че хиляди наши неврони умират всеки ден! Ако много бърникате обаче, ще я повредите — все едно, че върху човек е извършена безотговорна неврохирургнческа намеса. Няма да има «магически» зони в паметта, където например да е разположен коефициентът на интелигентност. Тази характеристика също ще бъде следствие от поведение на по-дълбоко ниво и никъде няма да се помещава експлицитно. Това се отнася и за неща, като «брой съображения, които може да държи в моментната си памет», «степента, в която обича физиката», и т. н.

Въпрос. *Ще може ли един Изкуствен интелект да се настрои така, че поведението му да бъде като моето или като вашето,, или нещо по средата между нас?*

Отговор. Не. Интелигентната програма няма да бъде хамелеон — поне доколкото и човекът не е. Тя ще разчита на неизменността на спомените си и няма да може да преминава от една личност в друга. Идеята, че с промяната на вътрешните параметри ще стане «настройка» на нова личност, говори за абсурдно недооценяване на сложността на личността.

Въпрос. *Програмата за изкуствен интелект ще има ли «сърце» или просто ще се състои от безсмислени кръгови вериги и редици от тривиални операции (по думите на Марвин Мински - Marvin Lee Minsky)?*

Отговор. Ако можехме да виждаме чак до дъното като в плитко езеро, с положителност бихме виждали само безсмислени кръгови вериги и редици от тривиални операции и сигурно не бихме видели никакво «сърце». Съществуват два вида крайни схващания за изкуствения интелект: според едното човешкият ум е поради фундаментални и тайнствени причини непрограмируем. Според другото необходимо е просто да се съберат подходящите «евристични» средства — мултипликационни оптимизатори, трикове за разпознаване на образи, планиращи алгебри, рекурсивно изпълними процедури и други подобни, и ще се получи интелект. Истината може би е някъде по средата и «езерото» на програмата за изкуствен интелект ще се окаже толкова тъмно и дълбоко, че няма да можем да надзърнем чак до дъното. Ако погледнем отгоре, кръговите вериги ще бъдат невидими, също както днес токоносещите електрони са невидими за повечето програмисти. Когато създадем програма, която издържи теста на Тюринг, ще видим «сърце», макар и да знаем, че него го няма.

Въпрос. *Ще станат ли някога интелигентните програми «свръхинтелигетни»?*

Отговор. Не зная. Не е много ясно дали ще можем да се разберем, или да се свържем с един «свръхинтелект», или дали самото понятие е смислено. Така например нашият собствен, интелект е свързан с бързината на мисълта ни. Ако рефлексите ни бяха десет пъти по-бързи или по-бавни, може би щяхме да развием коренно различни понятия за описание на света. Едно същество с коренно различен поглед към света може просто да няма много допирни точки с нас. Често съм се чудел дали например би могло да има музикални пиеси, които, съпоставени с пиесите на Бах, да изглеждат както Бах, сравнен с фолклорните мелодии — нещо като Бах на квадрат. И дали аз бих могъл да ги разбирам? Може би около мен вече има такава музика, а аз просто не я разпознавам, както кучетата не разбират нашия език. Идеята за свръхинтелект е много странна. Така или иначе не смятам, че това е целта на изследванията в областта на изкуствения интелект, макар че ако някога изобщо стигнем нивото на човешкия интелект, свръхинтелектът безспорно ще бъде следващата цел — не само за нас, но и за нашите колеги изкуствени интелигенти, които ще проявяват същия интерес към изкуствения интелект и свръхинтелекта. Много вероятно ми се струва изкуственият интелект да проявява изключителен интерес към изкуствения интелект изобщо по съвсем разбираеми причини.

Въпрос. *В такъв случай вие като че ли искате да кажете, че интелигентните програми ще бъдат на практика идентични с хората. Никаква разлика ли няма да има?*

Отговор. Вероятно разликите между интелигентните програми и човека ще бъдат по-големи от разликите между повечето хора. Почти невъзможно е да си представим, че «тялото», в което се вмества програмата, няма да ѝ повлияе дълбоко. И така, освен ако не носи удивително точно копие на човешко тяло — а кому е нужно това? — тя вероятно ще има коренно различен възглед върху това, кое е важно, кое е интересно и т. н. Витгенщайн веднъж направи любопитната забележка: «Ако лъвът можеше да говори, ние нямаше да го разберем.» Това ми напомня картината на Русо с кроткия лъв и спящата циганка сред огряната от луната пустиня. Но откъде знае Витгенщайн? Моето предположение е, че всяка интелигентна програма, макар и разбираема, ще ни се струва доста чужда. Поради тази причина много ще ни бъде трудно да решим кога и дали имаме наистина работа с интелигентна програма или просто със «странна програма».

Въпрос. *Когато направим интелигентна програма, ще разберем ли какво е интелект, съзнание, свободна воля, «аз»?*

Отговор. Общо взето, зависи какво разбираме под «разберем».

Първо, по същество вероятно всеки от нас има най-добрата възможна представа за тези неща. То е като слушането на музика. Наистина ли разбирате Бах, защото го раздробявате на съставните части? Или го разбирахте всеки път, когато усещахте възторга с всеки нерв от тялото си? Разбираме ли как скоростта на светлината е константа във всяка инерциална отправна система? Можем да направим сметката, но никой в света няма истински релативистка интуиция. И вероятно никой никога няма да разбере мистерията на интелекта и съзнанието по интуитивен път. Всеки от нас може да разбира *хора* и това вероятно е най-доброто приближение, до което можем да стигнем.

Въпрос. *Естествено е да се правят опити за прокарване на паралели между хората и достатъчно сложни формални системи които подобно на хората имат «самопредстави». Теоремата на Гьодел показва, че има фундаментални ограничения за непротиворечивите формални системи със «самопредстави». Но не можем ли да обобщим това наблюдение? Има ли «теорема на Гьодел» в психологията например?*

Отговор. Ако използваме теоремата на Гьодел като метафора, като източник на вдъхновение, вместо да се опитваме да я преведем буквално на езика на психологията или на която и да е друга дисциплина, тя може би ще ни наведе на нови истини в психологията или в други области. Напълно неоправдано е обаче механично да я превеждаме в твърдение от друга дисциплина, което да се приеме за също така валидно. Ще бъде много голяма грешка да се смята, че това, което е било изработено с виртуозна ювелирност в математическата логика, е валидно без изменения в една съвсем чужда област.

Въпрос. *Мисля, че един «превод» на теоремата на Гьодел в други области може да стане ценен източник на идеи и вдъхновения, стига предварително да се направи уговорката, че преводите са метафорични и не трябва да се приемат буквално. С тази уговорка аз виждам например път за използване на аналогии, свързващи теоремата на Гьодел с човешката мисъл, който води до разсъждения върху собствената ни вменяемост: Как можете да установите дали сте нормален? Това е наистина затворена верига. Започнете ли веднъж да поставяте под съмнение здравината на разсъдъка си, може да се окажете хванат в капана на един все по-шеметен водовъртеж от самоизпълняващи се пророчества, макар че този процес съвсем не е неизбежен. Всеки знае, че душевно болните тълкуват света през призмата на особената си, по своему непротиворечива логика: как можете да разберете дали собствената ви логика е «особена» или не при положение, че за самопреценката разполагате само със средствата на собствената си логика?*

Отговор. Не виждам отговор. Това просто ми напомня втората теорема на Гьодел, съгласно която единствените варианти на формалната теория на числата, които утвърждават собствената си непротиворечивост, са противоречивите.

Въпрос. *Всички ограничителни теореми на метаматематиката и теорията на пресмятането показват, че щом веднъж способността да представиш собствената си структура е достигнала определена критична точка, ти си «целунал смъртта»: ти никога няма да си представиш себе си изцяло. Теоремата на Гьодел (Kurt Gödel) за непълнота, теоремата на Чърч (Alonzo Church) за неразрешимост, теоремата на Тюринг (Alan Turing)за стоп-проблема, теоремата на Тарски (Alfred Tarski) за истината — всички те носят нещо от духа на древна приказка, която предупреждава, че «да се търси самопознание е все едно да се тръгне на пътешествие, което … винаги ще остане незавършено, не може да се нанесе върху никоя карта, никога няма да спре, не може да се опише». Но имат ли тези ограничителни теореми някакво отношение към хората?*

Отговор. Ето един начин да се разсъждава по този проблем. Аз или съм непротиворечив, или съм противоречив. (Последното е много по-вероятно, но за пълнота разглеждам и двете възможности.) Ако съм противоречив, то има два случая: 1) Случай на «неблагонадеждност»: моето самопознание е под определена критична точка. Тогава аз съм непълен «по хипотеза». 2) Случай на «благонадеждност»: моето самопознание е достигнало критичната точка, в която метафоричният аналог на ограничителните теореми вече е в сила, така че самопознанието ми се «самоподкопава» по гьоделевски и затова аз съм непълен. Случаите 1) и 2) се базират върху моя стопроцентова непротиворечивост — доста неправдоподобно състояние на нещата. По-вероятно е да съм противоречив и това е още по-лошо, тъй като тогава вътре в мен има противоречия, но как бих могъл изобщо да разбера това? Противоречив или не, никой не е освободен от мистерията на собственото «аз»: Вероятно всички ние сме противоречиви. Светът просто е прекалено сложен, за да може човек да си позволи лукса да примири всички свои убеждения. Напрежението и объркаността са важни в един свят, в който много решения трябва да се вземат бързо. Мигел де Унамуно (Miguel de Unamuno) веднъж каза: «Ако човек никога не си противоречи, той сигурно нищо не казва.» Бих казал, че всички ние сме в положението на учителя по Зен, който след като по време на спор многократно си противоречил, казал на объркания ученик: «Не мога да се разбера.»

Въпрос. *В такъв случай теоремата на Гьодел абсолютно нищо ли не може да ни предложи в разсъжденията ни за собствения ни ум?*

Отговор, Мисля, че може, макар и не по оня мистичен и ограничителен начин, по който някои хора си мислят, че тя трябва да ни служи. Мисля, че самият процес на постепенното разбиране на Гьоделовото доказателство и неговата структура, включваща произволни кодове, сложни изоморфизми, високи и ниски нива на интерпретация и способността за самоотразяване, може да влее някои плодотворни настроения в представите ни за символите и обработката на символите, което би задълбочило интуицията ни за взаимоотношенията между менталните структури от различни нива. Един изключително озадачаващ факт, свързан с доказателство на Гьодел, е, че той използва разсъдъчни методи, които сякаш не могат да бъдат «модулирани» — те се съпротивляват на включване в каквато и да е формална система. На пръв поглед поне изглежда, че Гьодел е изровил една неизвестна досега, но дълбоко значима разлика между човешкия и механичния разсъдък. Това тайнствено несъответствие в мощта на живите и неживите системи е отразено в несъответствието между понятията «истинност».и «доказуемост» или поне това е един «романтичен» поглед към ситуацията.

Въпрос. *Тази история с автореферентността и прочее е наистина много забавна, но мислите ли, че наистина има нещо сериозно в нея?*

Отговор. Категорично да. Смятам, че в края на краищата тя ще се окаже сърцевината на изкуствения интелект и средоточие на всички опити да разберем как работи човешкият ум.

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА

Към «Науката логика като свободно изкуство»

1. АРИСТОТЕЛЬ. Первая аналитика; Вторая аналитика. — В: *Аристотель. Сочинения.* т. 2, Москва, 1978.
2. *Библия, сиреч книгите на Свещеното писание на Ветхия и Новия завет,* София: Изд. на Св. синод на Бълг. църква, 1982.
3. *История на математиката от най-древни времена до началото на новото време.* т. 1—4, София, 1974 — 1981.
4. КЛИНИ, С. *Введение в метаматематику.* Москва, 1957.
5. ЛЕЙБНИЦ, Г. В. *Сочинения в четырех томах.* т. 3. Москва, 1984.
6. ЛУКАСЕВИЧ, Я. 1959. *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики.* Москва, 1959.
7. МАЛЬЦЕВ, А. И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* 2. изд., Москва, 1986.
8. МАНИН, Ю. 1977. Теоремата на Гьодел. — *Физ.-мат. сп.*, т. 20 (53), 1977, № 6, с. 245-252.
9. МАНИН, Ю. 1979. *Доказуемое и недоказуемое.* Москва, 1979.
10. МАНИН, Ю. 1980. *Вычислимое и невычислимое.* Москва, 1980.
11. УСПЕНСКИЙ, В. А. Семь размышлений на темы философии математики. *В: Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты.* Москва, 1987.
12. УСПЕНСКИЙ, В. А. *Машина Поста.* 2 изд., Москва, 1988.
13. ФРЕНКЕЛЬ, А., и И. БАР-ХИЛЛЕЛ, *Основания теории множеств.* Москва, 1966.

Към «Необходимите истини във възможните светове» и «Логика и логики»

1. АРИСТОТЕЛЬ. Об истолковании; Первая аналитика; Вторая анилитика. — *В: Аристотель. Сочинения.* Т. 2, Москва, 1978.
2. КАРНАП, Р. *Значение и необходимость. Исследование по семантике*

и модальной логике. Москва, 1959.

3. КРИПКЕ, С. 1974. Семантический анализ модальной логики. I. Нормальные модальные исчисления высказываний. — *В:* ФЕЙС, Р. *Модальная логика.* Москва, 1974.
4. ЛАПЛАС, П.-С. 1982. Философско есе за вероятностите. — *В: Бернули, Лаплас, Колмогоров. Вероятности.* София, 1982.
5. ЛЕЙБНИЦ, Г. В. 1989. Теодицея. — В: Лейбниц, Г. В. *Сочинения в четырех томах.* т. 4, Москва, 1989.
6. ЛУКАСЕВИЧ, Я. 1959. *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики.* Москва, 1959.
7. ПОППЕР, К. *Логика и рост научного знания. Избранные работы.* Москва, 1983.
8. *Семантика модальных и интенсиональних логик.* Москва, 1981.
9. ФЕЙС, Р. *Модальная логика.* Москва, 1974.
10. ХИНТИККА, Я. *Логико-эпистемологические исследования.* Москва, 1980.

Към «Раждането на алгоритми ката от каноничните форми на разума»

1. АЛ ХОРЕЗМИ, Мохамед ибн Муса. *Математические трактаты.* Ташкент, 1983.
2. ГАРГОВ, Г. 1977. Диофантово представяне на простите числа. *Физ.-мат. спис.,* т. 20 (53), 1977, № 4, с.327—330.
3. ДЕЙВИС, М. (Martin Davis) и Р. ХЕРШ (Reuben Hersh). 1977. Десетата проблема на Хилберт. *Физ.-мат. спис.,* т. 20 (53), 1977, № 6, с. 245—252.
4. ЗВОНКИН, А.К. и ЛЕВИН Л.А. 1970. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. *Успехи математических наук,* 1970, т.25, N6, с.85–127.
5. МАНИН, Ю. (Юрий Иванович Манин) *Вычислимое и невычислимое.* Москва, 1980.
6. МАРКОВ, А.(Андрей Андреевич Марков - младший) и Н. НАГОРНЫЙ (Николай Макарьевич Нагорный). 1984. *Теория алгорифмов.* Москва, 1984.
7. ПЕТКОВ, П. 1986. *Елементи на математическата логика в задачи.* София, 1986.

8. РОДЖЕРС, Х. (Hartley Rogers, Jr.) 1972. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.* Москва, 1972.
9. СКОРДЕВ, Д. 1980. *Комбинаторные пространства и рекурсивность в них.* София, 1980.
10. СКОРДЕВ, Д. 1981. *Алгоритми и алгоритмична изчислимост.* София, 1981.
11. ТЮРИНГ, А. (Alan Turing) 1966. *Може ли машината да мисли.* София, 1966.
12. УСПЕНСКИЙ, В. (Владимир Андреевич Успенский). 1988. *Машина Поста.* 2. изд., Москва, 1988.
13. УСПЕНСКИЙ, В. (Владимир Андреевич Успенский) и А. СЕМЕНОВ (Алексей Львович Семёнов). *Теория алгорифмов: основные открытия и приложения.* Москва 1987.

Към «Откровенията Гьоделеви, или за границите на формалното»

1. ГАРГОВ, Г. 1982. Въпроси за времето. *Съвременник*, 1982, № 3, с.442—458.
2. ГАРГОВ, Г. 1985. Гьодел, Ешер и Бах в странна примка. (По повод на една знаменита книга). *Съвременник*, 1985, № 1, с.448—466.
3. ГИЛЬБЕРТ, Д. (David Hilbert) и П. БЕРНАЙС. (Paul Bernays). *Основания математики.* т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. Москва 1979; т. 2.Теория доказательств. Москва 1982.
4. ГУДСТЕЙН, Р. (Reuben Goodstein) Проблемата за разрешимост. — *Физ.-мат. спис.*, т.5 (38), 1962, № 4, с.271—282.
5. КЛИНИ, С. (Stephen Cole Kleene) *Математическая логика.* Москва 1973.
6. КРОСЛИ, Дж.(John Newsome Crossley), К. ЕШ (C. J. Ash), К. БРИКХИЛ (C. J. Brickhill), Дж. СТИЛУЕЛ (John Stillwell), Н. УИЛИАМЗ (N. H. Williams). *Що е математическа логика?* София, 1980.
7. МАНИН, Ю. (Юрий Иванович Манин) Теоремата на Гьодел. — *Физ.-мат. спис.*, т.20 (53), 1977, № 6, с.245—252.
8. МАНИН, Ю. (Юрий Иванович Манин) *Доказуемое и недоказуемое.* Москва 1979.

9. МЕНДЕЛЬСОН, Э. (Elliott Mendelson) *Введение в математическую логику*. Москва 1984.
10. НАГЕЛ, Ъ. (Ernest Nagel) и Дж. НЮМАН (James R. Newman). Доказателството на Гьодел. — *Физ.-мат. спис.*, т.9 (62), 1966, № 3, с.193—216.
11. фон НОЙМАН, Дж. (John von Neumann) Математикът.—В: *Вселена'69. Природонаучен алманах.* София, 1969, 58—64.
12. ПЕТКОВ, П. 1986. Курт Гьодел. *Математика*, 1986, № 2, с.2—6.
13. ПЕТКОВ, П. 1986. Теоремите на Гьодел за непълнота. — *Математика*, 1986, № 2, 6—11.
14. ПЕТКОВ, П. Животът и делото на Курт Гьодел (по случай 80 години от рождението му). В: *Математика и математическо образование.*
15. Трудове на ПЕТНАДЕСЕТАТА ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ НА СЪЮЗА НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ. София, 1986.
16. СМАЛЬЯН, Р. 1981. (Рэймонд Меррилл Смаллиан - Raymond Merrill Smullyan) *Теория формальннх систем.* Москва 1981.
17. СМАЛЬЯН, Р. 1985. *Принцеса или тигр?* Москва 1985.
18. СМОРИНСКИЙ, К. 1983. (Craig Smorynski) Теоремы о неполноте. — В: Дж. БАРВАЙС ред. (Jon Barwise). *Справочная книга по математической логике Часть IV. Теория. доказательств и конструктивная математика.* Москва 1983.
19. СМУЛЯН, Р. 1986. (Реймънд Смълян - Raymond Merrill Smullyan) *Как се казва тази книга?* София, 1986.
20. УСПЕНСКИЙ, В. 1982. *Теорема Геделя о неполноте*. Москва 1982.

Към «Гьодел, Ешер, Бах: Метамагически спекулации»

1. *Бесконечность и вселенная*. Москва 1969.
2. ВАРГА, Б., Ю. ДИМЕНЬ и З. ЛОПАРИЦ. 1981. *Язык, музыка, математика.* Москва 1981.
3. ГАРГОВ, Г. 1985. Гьодел, Ешер и Бах в странна примка (по повод на една знаменита книга). *Съвременник*, 1985, № 1, с.448—466.
4. ДЕПМАН, И. Я. 1965. (Иван Яковлевич Депман) *История арифметики.* Москва 1965. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/istoria/depman.htm
5. ПУАНКАРЕ, А. 1983. (Henri Poincaré). *О науке.* Москва 1983.

6. HOFSTADTER, D. 1979. *Goedel, Esher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York : Basic Books, 1979.

Към «Съществува ли Канторовият рай и наистина ли е рай?»

1. АЛЕКСАНДРОВ, П. С. 1977. (Павел Сергеевич Александров). *Введение в теорию множеств и общую топологию*. Москва 1977.
2. БАРВАЙС, Дж. (Jon Barwise) ред. 1982. *Справочная книга по математической логике.. Часть II. Теория множеств*. Москва 1982.
3. БУРБАКИ, Н. 1965. (Nicolas Bourbaki) Теория множеств. Москва 1965.
4. ВИЛЕНКИН, Н. Я. (Наум Яковлевич Виленкин) *Разкази за множествата*. София, 1968.
5. ГИЛЬБЕРТ, Д. (David Hilbert) и П. БЕРНАЙС (Paul Isaac Bernays) *Основания математики. Т. I. Логические исчисления и формализация арифметики*. Москва 1979. *Т. II. Теория доказательств*. Москва 1982.
6. ГЬОДЕЛ, К. (Kurt Friedrich Goedel) 1967. Какво представлява проблемата на Кантор за континуума ? *Физ.-мат. спис.*, т.10, 1967, № 3, с.198—212.
7. ЙЕХ, Т. (Tomáš Jech) 1973. *Теория множеств и метод форсинга*. Москва 1973.
8. КАНТОР, Г. (Georg Cantor) 1985. *Труды по теории множеств*. Москва 1985.
9. КЛИНИ, С. *Введение в метаматематику*. Москва, 1957.
10. КОЭН, П. (Paul J. Cohen) 1969. *Теория множеств и континуум-гипотеза*. Москва 1969.
11. КОЭН, П., (Paul J. Cohen) Р. ХЕРШ (Reuben Hersh). 1969. Неканторова теория на множествата. *Физ.-мат. спис.*, 12, 1969, № 4, 299—316.
12. КУРАТОВСКИ, К. (Kazimierz Kuratowski). 1979. *Увод в теорията на множествата и топологията*. София, 1979.
13. КУРАТОВСКИЙ, К. (Kazimierz Kuratowski) и А. МОСТОВСКИЙ (Andrzej Mostowski). *Теория множеств*. Москва
14. ЛАВРОВ, И. А. (Игорь Андреевич Лавров) и Л. Л. МАКСИМОВА (Лариса Львовна Максимова). 1984. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгорифмов*. Москва 1984.

15. МЕНДЕЛЬСОН, Э. 1984. (Elliott Mendelson) *Введение в математическую логику.* Москва 1984.
16. МОСТОВСКИ, А. (Andrzej Mostowski). Непротиворечивост и независимост на хипотезата за континуума. *Физ.-мат. спис.*, т.8, 1965, № 2, с.139—141.
17. ПЕТКАНЧИН, Б. 1959. *Основи на математиката.* София, 1959.
18. РАШОВА, Х. 1972. *Елементи на теорията на множествата и математическата логика.* София, 1972.
19. РОДЖЕРС, Х. (Hartley Rogers, Jr.) Т*еория рекурсивных функции и эффективная вычислимость.* Москва 1972.
20. СЛУПЕЦКИЙ, Е. и Л. БОРКОВСКИЙ. 1965. *Элементы математической логики и теории множеств.* Москва 1965.
21. СТИЙП, Л. 1977. Основи на математиката — неразрешими задачи. *Физ.-мат. спис.*, т.20, 1977, № 3, с.262—264.
22. СТОЛЛ, Р. 1968. *Множества. Логика. Аксиоматические теории.* Москва 1968.
23. ФРЕНКЕЛЬ, А. и И. БАР-ХИЛЛЕЛ, *Основания теории множеств*. Москва 1966.
24. ХАО, ВАН (Hao Wang) и Р. МАК-НОТОН. *Аксиоматические системы теории множеств.* Москва 1963.
25. ХИЛБЕРТ, Д. Математически проблеми. *Физ.-мат. спис.*, т. 12, 1969, № 1, с.34—48; № 2, с.136-153.
26. ХИЛБЕРТ, Д. *Основи на геометрията.* София, 1978.

ИСТОРИЧЕСКИ ПОКАЗАЛЕЦ-КАЛЕНДАР

6в. пр.н.е.	Хераклит въвежда Логоса като всеобщ закон и висша цел на познанието; Лао-Дзъ въвежда Дао като всеобщ закон и висша цел на познанието.
5в. пр.н.е	В школата на софистите се изгражда изкуството на доказателството (диалектиката); Сократ въвежда индукцията в общите определения.
4в. пр.н.е	Мегарска школа: Евбулид изказва парадокса на Лъжеца; Диодор от Кронос строи темпорална логика; Филон въвежда импликацията; Платон развива учението за идеите; Аристотел поставя основите на формалната логика и изгражда Силогистиката.
3в. пр.н.е	Школата на стоиците (Хризип и др.) открива главните закони на съждителното смятане.
5в. - 6в.	Марциан Капела *(За сватбата на Меркурий и Филология, или 9книги за седемте свободни изкуства)*, Боеций *(Утешение във философията)* и Касиодор *(За свободните изкуства и науки)* превръщат логиката в учебен предмет.
800 - 850	Активна дейност на ал Хорезми.
11в.	Михаил Псел измисля логическия квадрат и написва *Обзор на логиката на Аристотел;* Абелар въвежда модалната импликация; Мойсей Маймонид написва *Логически речник;* Петър Испански (папа Йоан XXI) написва *Сборник по логика* и дава мнемонични имена на силогизмите; Дунс Скот формулира закона, носещ неговото име; Раймонд Лул описва първата «логическа машина» и съставя *Великото и последно изкуство.*
17в.	Паскал построява първата сметачна машина и формулира правилата за определенията; Лайбниц открива аритметичната интерпретация на силогистиката и основните закони на логиката на класовете, формулира идеята за универсалния език на науката и скицира всеобщия алгоритъм на познанието.
1638	Галилей отбелязва равномощността на множеството на естествените числа с негово същинско подмножество.

1847	Излизат *Формална логика, или смятане с необходими и вероятни заключения* на де Морган и *Математически анализ на логиката, който е опит за пресмятане на дедуктивното разсъждение* на Дж. Бул: ражда се математическата логика.
1854	Излиза *Изследване на законите на мисълта, върху които се основават математическите теории на логиката и вероятността* на Бул.
1872	Излиза от печат статията на Кантор *Обобщение на една теорема от теорията на тригонометричните редове,* в която се забелязват наченки на теорията на множествата .
1873	Кантор доказва, че множеството на рационалните числа и множеството на алгебричните числа са равномощни с множеството на естествените числа, а множеството на реалните числа не е равномощно с него.
1877	Кантор доказва, че крайномерните евклидови пространства (в частност правата, равнината и тримерното евклидово пространство) са равномощни помежду си. Освен това въвежда понятието мощност и изказва хипотезата за континуума. Шрьодер формулира принципа за дуалност.
1879	Фреге аксиоматизира съждителното смятане и въвежда кванторите.
1880	Кантор въвежда трансфинитните числа. Пирс въвежда конюнктивната и дизюнктивната нормална форма.
1885	Пирс открива табличния алгоритъм за съждителните операции.
1890	Кантор доказва, че множеството от подмножествата на едно множество не е равномощно със самото множество.
1895	Кантор открива логическата антиномия, известна като «парадокс на Бурали-Форти».
1897	Бурали-Форти публикува забелязаното от него логическо противоречие.
1899	Кантор открива т. нар. «парадокс на Кантор», който се отнася до мощността на множеството от всички множества.

1900	Хилберт изнася пред Международния конгрес на математиците в Париж доклад, в който поставя своите прочути 23 математически проблеми. От тях най-тясно свързани с въпросите на логиката и логическите основи на точните науки са първата (за мощността на континуума), втората (за непротиворечивостта на аритметичните аксиоми); шестата (за аксиоматично изграждане на някои физически дисциплини) и десетата (за разпознаване на разрешимостта на диофантовите уравнения).
1902	Ръсел открива парадокса, който носи неговото име.
1903	Излиза от печат монография на Ръсел, в която е изложен и откритият от него парадокс.
1904	Хилберт за първи път излага идеята на своята програма за доказване на непротиворечивостта на аксиоматичните системи с помощта на тяхната формализация.
1905	Начало на активна дискусия относно смисъла на математическите твърдения за съществуване. Дискусията е свързана с явното формулиране и използване на аксиомата за избора в теорията на множествата. Действуващи лица: Адамар, Бер, Бернщайн, Борел, Поанкаре, Ръсел, Лебег, Цермело.
1907 - 1908	Брауер публикува своите възгледи за естеството на математическото творчество, с което отхвърля всеобщата приложимост на някои общоприети дотогава логически принципи и дава начало на интуиционисткото направление в математиката.
1908	Цермело публикува своята аксиоматична система на теория на множествата.
1915	Льовенхайм открива разрешаващ алгоритъм за едноместното редикатно смятане и доказва теоремата, носеща неговото име.
1918	Люис въвежда строгата импликация и модалната логика.
1920	Лукашевич построява първата тризначна логика.
1921	Лукашевич и Пост построяват многозначните логики; Пост доказва непротиворечивостта и пълнотата на съждителното смятане.
1922	Френкел допълва аксиоматичната система на Цермело с т. нар. аксиомна схема за заместване.

1926	Хилберт и Бернайс доказват независимостта на аксиомите на съждителното смятане.
1928	Ербран доказва теоремата за дедукцията.
1920 - 1930	Период на активни усилия за осъществяване на програмата на Хилберт, предвиждаща формализиране на математическите теории (и в крайна сметка на цялата математика), доказване на тяхната непротиворечивост и доказване целесъобразността на теоретико-множествените начини на разсъждаване, въведени от Кантор.
1930	Хайтинг предлага формална система, аксиоматизираща интуиционисткото съждително смятане.
1930	(7 септември, Втора конференция по епистемология на точните науки, Кьонигсберг) Първо публично съобщение на Гьодел относно принципната непълнота на формалните методи за разсъждаване.
1931	Гьодел публикува знаменитата си теорема за непълнота, от която следват съкрушителни изводи във връзка с Хилбертовата програма за доказване на непротиворечивостта на математиката.
1931 - 1936	Период, през който се създава и утвърждава математическата дефиниция на понятието «алгоритъм» и по-точно на алгоритмично изчислима функция. Главни действуващи лица: Пост, Ербран, Гьодел, Чърч, Клини, Тюринг.
1933 - 1934	Чърч изказва убеждението, известно днес като «тезис на Чърч», че полученото по това време от него математическо уточнение на понятието «алгоритмично изчислима функция» отговаря адекватно на съответното интуитивно понятие.
1938	Гьодел доказва съвместимостта на хипотезата за континуума с аксиомите на теорията на множествата.
1957	Прайор създава съвременната времева логика
1959 - 1965	Крипке въвежда семантиката на възможните светове в модалната логика.
1963	Коен доказва съвместимостта на отрицанието на хипотезата за континуума с аксиомите на теорията на множествата.
1970	Матиясевич решава десетата проблема на Хилберт.
1987	В Софийския университет са изнесени «Сказките по логика».

Владимир Сотиров
Петьо Петков
Георги Гаргов
Димитър Вакарелов
Димитър Скордев

СКАЗКИ ПО ЛОГИКА

Българска

Дигитално издание

Съставители Валентин Горанко, Соломон Паси
Рецензенти Сава Петров, Славян Радев

дигитално издание
худ.редакция нина нинова